



**Tielaitos**

Juha Hartikainen, Martti Mikkola, Reijo Orama

# **Maan routimisen termomekaaninen malli ja sen laskelmat**

**Tielaitoksen  
selvityksiä**

**45/1994**

Helsinki 1994

**Geokeskus**

Tielaitoksen selvityksiä  
45/1994

Juha Hartikainen, Martti Mikkola, Reijo Orama

**Maan routimisen termomekaaninen  
malli ja sen laskelmat**

**Tielaitos**  
Geokeskus

Helsinki 1994



Raportin tuotanto  
*Juha Hartikainen*

ISSN 0788-3722  
ISBN 951-47-9437-0  
TIEL 3200254  
Painatuskeskus Oy  
Helsinki 1994

Julkaisun kustannus ja myynti:  
Tielaitos, hallinnon palvelukeskus,  
painotuotepalvelut  
Telefax (90) 1487 2652

**Tielaitos**

Opastinsilta 12 A  
PL 33  
00521 HELSINKI  
Puh. vaihde (90) 148 721

HARTIKAINEN, Juha & MIKKOLA, Martti & ORAMA, Reijo: Maan routimisen termomekaaninen malli ja sen laskelmat. Helsinki 1994, Tielaitos. Tielaitoksen selvityksiä 45/1994, 74 s. + liit. 33 s, ISBN 951-47-9437-0, ISSN 0788-3722, TIEL 320 0254.

Asiasanat maan routiminen, termomekaaninen mallintaminen, yksiulotteinen tapaus.

## Tiivistelmä

*Frèmond* ja *Mikkola* ovat johtaneet matemaattisen mallin vedellä täysin kyllästyneen maan jäätymiselle käyttäen kontinuumimekaniikan ja makroskooppisen termodynamiikan periaatteita. He ovat tarkastelleet jäätyvää maata raerungon, huokosveden ja huokosjään seoksena olettaen tuntemattomat funktiot jatkuviksi. Matemaattinen malli kykenee kuvamaan huokosveden jäätymisestä aiheutuvan imun, huokosveden ja lämmön siirtymisen sekä routanousun. Erityisessä termomekaanisessa mallissa raerunko oletetaan kimmoiseksi, huokosjää kimmo-visko-plastiseksi ja huokosvesi maarakeisiin adsorboituneeksi ideaalinesteeksi. Adsorption vaikutusta veden jäätymiseen on kuvattu konveksisella funktiolla, joka riippuu raerungon, huokosveden ja huokosjään tilavuusosista.

Tässä työssä on tarkasteltu *Mikkolan* esitystä maan jäätyksen matemaattisesta mallintamisesta. Maan jäätyksen fysikaalista ilmiötä on selvitetty. Yksiulotteisen tapauksen yhtälöt on muodostettu. Termisestä, hydraulisesta ja mekaanisesta osasta koostuva tehtävä on ratkaistu elementtimenetelmällä. Esimerkkejä on laskettu käyttäen vertailukohteena erästä routanousukoetta.

Matemaattinen malli näyttää lupaavalta, koska lasketut tulokset vastaavat varsin hyvin koetuloksia. Laskelmat osoittavat myös mallin jatkokehittelyn tarpeen.

HARTIKAINEN, Juha & MIKKOLA, Martti & ORAMA, Reijo: Thermomechanical model for freezing soil and its computer implementation. Helsinki 1994, Finnish National Road Administration. Research report 45/1994, 74 p. + app. 33 p, ISBN 951-47-9437-0, ISSN 0788-3722, TIEL 320 0254.

**Keywords** frost heave, thermomechanical modeling, one-dimensional case.

## Abstract

A mathematical model for the freezing of saturated soil has been derived by *Frémond* and *Mikkola* using the basic principles of continuum mechanics and macroscopic thermodynamics. They have considered the freezing soil as a mixture of skeleton, pore water and pore ice assuming the unknown functions be continuous. The model is capable of describing the cryogenic suction, the water and heat transport and the frost heave. In specifying the model the skeleton is assumed to be elastic, the pore ice elastic-viscoplastic and the pore water ideal liquid adsorbed to the grains. The effect of the adsorption on the freezing of water has been described by a convex function depending on the fractions of the skeleton, the pore water and the pore ice.

In this work *Mikkola's* presentation of the mathematical modeling of the freezing of soil has been examined. The physical phenomenon of the freezing of soil has been elucidated. The one-dimensional formulation of the equations has been carried out. The coupled problem involving thermal, hydraulic and mechanical parts has been solved using the finite element method. Some examples have been calculated for comparison with the results of the frost-heave test.

The model seems to be promising because the calculated results are in a reasonable agreement with experimental ones. The calculations revealed the need for further development of the model.

## Alkusanat

Tämä työ on tehty Teknillisen korkeakoulun rakenteiden mekaniikan laboratoriossa professori *Martti Mikkolan* johdolla liittyen Tielaitoksen Geokeskuksen projektiin "Roudan vaikutusten mallintaminen". Rakenteiden mekaniikan laboratorio kiittää työn rahoittajana toiminutta Tielaitosta sekä ylitarkastaja *Reijo Oramaa* ja professori *Eero Slungaa* hyödyllisistä keskusteluista ja neuvoista.

Espoossa lokakuussa 1994

Juha Hartikainen ja Martti Mikkola

---

**SISÄLTÖ**


---

<b>SYMBOLILUETTELO</b>	<b>8</b>
<b>1 JOHDANTO</b>	<b>11</b>
<b>2 MAAN JÄÄTYMISEN FYSIIKKA</b>	<b>13</b>
2.1 Jäätyneen maan olomuoto	13
2.1.1 Raerungon rakenne	14
2.1.2 Huokosveden sitoutuminen	14
2.1.3 Huokosjään kiteytyminen	16
2.2 Faasinmuutoksen termodynamiikka	17
2.2.1 Puhdas, sitoutumaton vesi	19
2.2.2 Huokosveden jäätyminen	20
2.3 Veden liike	21
<b>3 MAAN JÄÄTYMISEN MEKANIikka</b>	<b>24</b>
3.1 Kinematiikka	24
- Raerungon, huokosveden ja -jään tilavuusosat	24
- Huokosveden ja -jään suhteelliset nopeudet	24
- Deformaationopeus	24
- Venymätensori	25
- Ainederivaatta	25
- Tilavuusintegraalin ainederivaatta	25
- Gaussin lause	25
3.2 Kinetiikka	26
3.2.1 Yleinen säilymislaki	26
3.2.2 Massan säilyminen	27
3.2.3 Liikemäärän tase	27
3.2.4 Energian tase	28
3.2.5 Entropian kasvu	30
3.3 Konstitutiiviset yhteydet	32
3.3.1 Konstitutiivisten yhtälöiden muodostaminen	32
3.3.2 Routivan maan konstitutiiviset yhteydet	37
- Jännityksille	39
- Faasinmuutokselle	39
- Huokosveden virtaukselle	39
- Lämmönjohtumiselle	39



3.3.3 Jäätävän maan Clausius-Clapeyronin yhtälö	39
3.4 Yhteenveto	40
<b>4 ROUTIMISTEHTÄVÄ</b>	<b>41</b>
4.1 Huokosveden suhteellinen osuus	42
4.2 Huokosveden virtausnopeus	43
4.3 Huokoisuuden jatkuvuusyhtälö	44
4.4 Huokosveden jatkuvuusyhtälö	44
4.5 Jäätäneen maan tasapainoyhtälö	45
4.6 Energiayhtälö	46
4.7 Jäätävän maan Terzaghin yhtälö	48
4.8 Reuna-, alku- ja jatkuvuusehdot	49
4.8.1 Termiset reunaehdot	49
4.8.2 Mekaaniset reunaehdot	50
4.8.3 Alkuehdot	51
4.8.4 Jatkuvuusehdot	51
4.9 Routimistehtävän ainevakiot	54
4.10 Yhteenveto	54
<b>5 YKSIULOTTEISEN TAPAUKSEN TARKASTELU</b>	<b>57</b>
5.1 Yksiulotteinen routimistehtävä	57
5.2 Routimistehtävän ratkaiseminen	59
5.3 Esimerkkilaskelma	60
5.3.1 Lähtötiedot	60
5.3.2 Tulokset ja tulosten tarkastelu	61
<b>6 PÄÄTELMÄT</b>	<b>68</b>
<b>7 KIRJALLISUUSLUETTELO</b>	<b>70</b>
<b>8 LIITTEET</b>	<b>74</b>

## SYMBOLILUETTELO

## Termodynamiikka

$a_k$	kinemaattinen koordinaatti
$E$	sisäenergia
$G$	Gibbsin vapaa energia
$H$	entalpia
$L$	veden sulamislämpö
$p$	paine
$Q$	lämpö eli lämpömäärä
$S$	entropia
$T$	termodynaaminen lämpötila
$V$	tilavuus
$W$	työ
$( )^{(i)}$	irreversiibeli
$( )^{(r)}$	reversiibeli
$( )^*$	muutos aikaa kohti

## Kinematiikka

$d_{ij}$	deformaationopeus
$n$	huokoisuus
$t$	aika
$u_i$	siirtymä
$U_i$	nopeus
$V_i$	suhteellinen nopeus
$W_i$	epäjatkuvuuspinnan nopeus
$x_i$	paikkavektori
$z$	syvyys
$\beta$	tilavuusosa
$\varepsilon_{ij}$	venymätensori
$\rho$	tiheys
$v_i$	yksikkönormaalivektori
$\chi$	huokosveden suhteellinen osuus
$( )'$	aineriderivaatta
$( )^\cdot$	deviatorinen

## Kinetiikka

$e$	sisäenergia tilavuutta kohti
$f_i$	tilavuusvoima eli kappalevoima
$h$	huokosveden paineen muutos
$m_i$	tuntematon liikemäärän tuotto
$P$	teho
$p$	isotrooppinen paine

$q_i$	lämpövuovektori
$r$	lämmön kehittyminen
$s$	entropia tilavuutta kohti
$T$	liike-energia
$\gamma$	tuntematon entropian tuotto
$\theta$	tuntematon massan tuotto
$\sigma_{ij}$	jännitystensori
$\sigma_i^{(v)}$	jännitysvektori eli traktio
$\phi$	dissipaatiopotentiaali
$\psi$	vapaa ominaisenergia
$\bar{d}$	dissipaatiofunktio
$\ell$	tuntematon teho

#### Ainevakioita

$a$	huokosveden sitoutumisen parametri
$C$	ominaislämpökapasiteetti
$E$	kimmokerroin
$G$	liukukerroin
$g_i$	putoamiskiihtyvyys
$K$	tilavuudenmuutoskerroin
$k$	veden johtavuus
$L$	veden sulamislämmön komponentti
$M$	muodonmuutoskerroin
$T_0$	veden normaali jäätymispiste
$\ell$	veden ominaissulamislämpö
$\kappa$	lämmönjohtavuus
$\kappa^e$	puristuvuuskerroin
$\mu$	Lamen vakio
$\nu$	Poissonin suhde
$K^p, p, \lambda$	viskoplastisen aineen parametrit

#### Elementtimenetelmä

$b$	elementin pituuden puolikas
$[B]$	muotofunktioatriisin derivaatta paikan (z) suhteen
$\{F\}$	elementtivektori
$[K]$	elementtimatriisi
$[N]$	muotofunktioatriisi
$\xi$	paikallinen koordinaatti
$\phi$	yleinen muuttuja
$\Gamma$	ratkaisualueen reuna
$\Omega$	ratkaisualue
$\Delta T$	kiinteä aika-askel
$\Delta \tau$	adaptiivinen aika-askel



**Alaindeksit**

$ext$	ulkoinen
$i \dots n, z, \alpha, \beta$	tensorimerkinnän indeksit
$(IR)$	irreversiibeli
$(R)$	reversiibeli
$(TH)$	termodynaaminen
-	kylmä reuna
+	lämmin reuna
$g$	aika
$h$	paikka

**Yläindeksit**

$e$	elementti
$i$	jää
$s$	raerunko
$w$	huokosvesi
$o$	alkutila

**Matemaattisia merkintöjä**

$C$	konveksinen joukko
$R$	reaalinen avaruus
$\delta_{ij}$	yksikkötensori
$I$	indikaattorifunktio
$\hat{B}$	subgradientti
$f, \tilde{f}$	konveksinen funktio
$\partial ( )$	subdifferentiaali

## 1 JOHDANTO

Maan jäätyminen on otettava huomioon maa- ja pohjarakenteiden suunnittelussa sekä maa- ja pohjarakennustöiden toteutuksessa talviolosuhteissa. Maan jäätyminen ja etenkin routiminen voivat aiheuttaa merkittäviä vaurioita rakennusten pohjarakenteisiin, putkijohtoihin, teiden, katujen ja rautateiden rakenteisiin sekä muihin maarakenteisiin. Maan jäädyttämistä käytetään lujitusmenetelmänä ja veden liikkeiden estäjänä.

Jäätyvä maa on monikomponenttinen systeemi koostuen mineraalipartikkelien muodostamasta raerungosta, ilmasta sekä veden kolmesta faasista: neste-mäinen vesi, vesihöyry ja jää. Maan huokosissa olevasta vedestä osa on adsorboitunut mineraalipartikkeleihin ja osa on vapaata liikkuen huokosveden paineen ja painovoiman vaikutuksesta.

Maa routaantuu, kun maan huokosissa oleva vesi jäätyy. Routaantuminen muuttuu routimiseksi, mikäli huokosveden jäätymisestä aiheutuu imu, ja imun seurauksena jäätymisvyöhykkeeseen virranneen veden jäätyminen aiheuttaa huokoisuuden kasvun ja routanousun. Routiminen käynnistyy, kun lämpötila laskee alle normaalin jäätympisteen ( $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) ja mineraalipartikkeleihin adsorboitunut huokosvesi jäätyy. Routimisen voimakkuuteen vaikuttavat lähinnä mineraalipartikkelien ominaisuudet, maan huokoisuuden jakautuminen, vedenläpäisevyys ja vesipitoisuus.

Maan routimisilmiötä on kuvattu monilla teorioilla. *Kujalan (1991)* mukaan merkittävimmät käytössä olevat teoriat ovat kapilaarinen teoria, sekundääri-nen routateoria, adsorptiovoimaan perustuva teoria, osmoottinen teoria, hydrodynaaminen teoria ja segregatiopotentialin käyttöön perustuva teoria. Lisäksi esimerkiksi *Blanchard & Frèmond (1985)* ovat esittäneet teorian, joka perustuu olettamukseen, että maan huokoisuus riippuu lämpötilasta. Käytän-nön tehtävissä maan routimista arvioidaan myös materiaaliominaisuuksien perusteella. *Williamsin (1991)* mukaan huokosveden jäätymisilmiö ei ole vielä kuitenkaan täysin selvitetty.

*Frèmond'n ja Mikkolan (1991)* kehittämä matemaattinen mallin vedellä täysin kyllästyneen maan jäätymiselle perustuu kontinuumimekaniikan ja makro-skoopin termodynamiikan periaatteisiin. He ovat käsitelleet jäätyvää maata kolmikomponenttisena seoskontinuumina operoiden raerungon, huokosveden ja huokosjään tilavuusosien avulla. Yleisistä säilymislaeista on käytetty massan säilymisen periaatetta, liikemäärän taseen periaatetta ja energian taseen periaatetta. Konstitutiiviset yhtälöt on johdettu käyttäen termodynamiikan toista pääsääntöä eli entropian kasvun periaatetta valitsemalla sopivat vapaan energian ja dissipaatiopotentialin lausekkeet. Malli kykenee kuvaamaan huokosveden jäätymisestä aiheutuvan imun, huokosveden ja lämmön

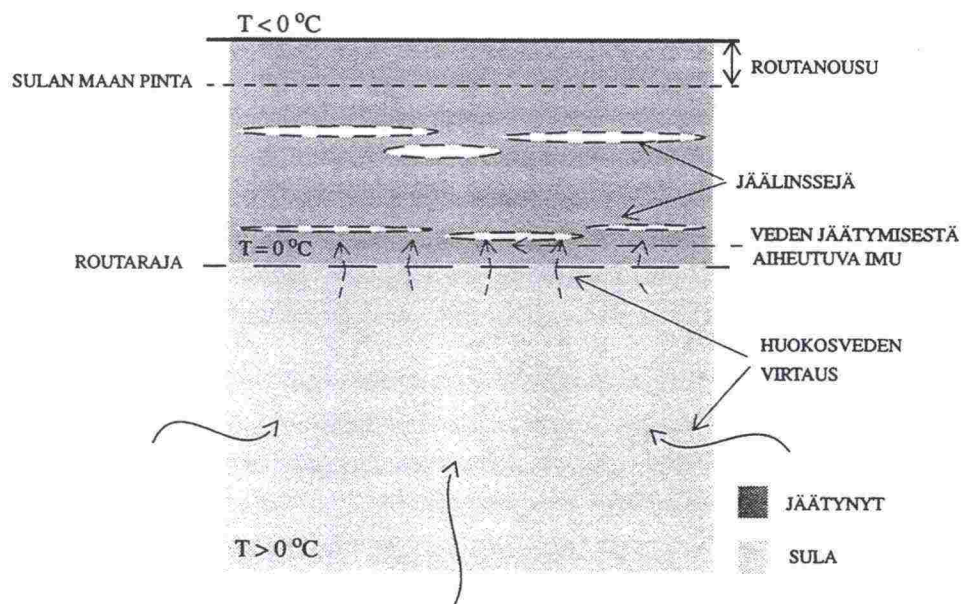
siirtymisen sekä routanousun. Erityinen termomekaaninen malli on esitetty routivan maan jäätymiselle.

Tämän työn tarkoituksena on selvittää vedellä täysin kyllästyneen maan jäätymisen *Frèmond'n* ja *Mikkolan* mukaista matemaattista mallintamista sekä soveltaa routivan maan jäätymisen termomekaanista mallia yksiulotteisen tapauksen tarkastelussa. Termomekaanisesta mallista formuloitu routimistehävä on ratkaistu yksiulotteisessa tapauksessa elementtimenetelmällä käyttäen Galerkinin keinoa paikan dimensiossa ja epäjatkovaa Galerkinin keinoa ajan dimensiossa. Epälineaarisuudet on ratkaistu Newton-Raphsonin menetelmällä. Esimerkkilaskelmia on tehty käyttäen vertailukohteena vakiolämpötilakokeena tehtyä routanousukoeetta.



## 2 MAAN JÄÄTYMISEN FYSIIKKAA

Maan jäätyminen on usean fysikaalisen ilmiön summa. Ilmiöitä ovat lämmön siirtyminen, faasinmuutos ja aineen liike. Maan jäätymistä on havainnollistettu kuvassa 1, jossa on esitetty myös aiheeseen liittyvää käsitteistöä.



Kuva 1: Maan jäätymisen havainnollistaminen.

Maan jäätyminen on eräänlainen ketjureaktio: kun maa jäähtyy riittävästi, maan huokosissa oleva vesi alkaa jäätyä; veden jäätyminen aiheuttaa sopivissa olosuhteissa imureaktion; riittävän voimakas imu saa aikaan veden virtauksen jäätymisvyöhykkeeseen; virranneen veden jäätyminen jäätymisvyöhykkeessä ja jään vettä suurempi tilavuus pakottavat maan huokosia laajentumaan muodostaen sopivissa olosuhteissa jäälinssejä; huokoisuuden kasvu aiheuttaa raerunkoon siirtymiä, mikä havaitaan routanousuna. Maan jäätyminen yksi ja ehkä olennaisin piirre on, että osa maan huokosissa olevasta vedestä ei jäädy, vaikka lämpötila laskee alle jäätympisteen ( $0\text{ °C}$ ) (Williams 1967, Kujala 1991). Maan huokosveden jäätymistä nimitetään maan routaantumiseksi, kun taas maan katsotaan routivan, jos edellisen lisäksi jäätymisestä aiheutuu raerungon siirtymiä.

### 2.1 Jäätynneen maan olomuoto

Jäätynyt maa on monimutkainen useasta eri faasista koostuva epähomogeeninen seos. Faasilla tarkoitetaan systeemiin kuuluvaa tarkasti rajattua homogeenista osaa. Kun jäätynyttä maata tarkastellaan makroskooppisesti, sen faaseiksi voidaan rajata raerunko, huokosvesi, huokosjää ja huokosilma.

Näistä kutakin voidaan pitää edelleen mikroskooppisella tasolla seoksena: raerunko koostuu erilaisista mineraalipartikkelista sekä orgaanisista aineksista ja yhdisteistä; huokosvesi on vesimolekyyleistä, erilaisista ioneista ja orgaanisista yhdisteistä koostuva liuos; huokosjää syntyy vesimolekyylien kiteytyessä erilaisten epäpuhtaushiukkasten ympärille; huokosilma on vesihöyryn ja erilaisten kaasujen seos. Seuraavassa tarkastellaan lähemmin raerungon, huokosveden ja -jään maan routivuuteen vaikuttavia tärkeimpiä ominaisuuksia mikroskooppisella tasolla.

### 2.1.1 Raerungon rakenne

Raerunko rakentuu eri kokoisista ja tyyppisistä mineraalipartikkeleista, joista maan routivuuteen eniten vaikuttavat savimineraalit, kun taas karkearakeisten maalajien mineraalipartikkelit vaikuttavat lähinnä maan lujuusominaisuuksiin. Maalajin sanotaan olevan routiva, kun se sisältää riittävästi savimineraaleja.

Savimineraalit ovat pieniä kolloidihiuksia, joille on ominaista suuri ominaispinta-ala ja negatiivinen pintavaraus. Varaustasapainon saavuttamiseksi mineraalipartikkelit adsorboivat pinnalleen vesimolekyylejä ja kationeja. Savimineraalien pinta voi olla paikallisesti myös positiivisesti varautunut, jolloin ne adsorboivat pinnalleen anioneja. Tällä on todettu (Kujala 1985) kuitenkin olevan merkitystä vain happamissa olosuhteissa.

Savimineraaleista koostuvan raerungon rakenne määräytyy mineraalipartikkelien välillä vallitsevien veto- ja poistovoimien yhteisvaikutuksesta sekä vallitsevasta jännitystilasta. Partikkelit vaikuttavat toisiinsa suoran kosketuksen, adsorptioveden ja ns. sähköisen kaksoiskerroksen kautta. Karkearakeisten maalajien mineraalipartikkelien välillä ei ole vastaavan tyyppistä sähkökemiallista vuorovaikutusta, vaan raerungon oletetaan koostuvan toisiinsa kosketavista erillisistä partikkeleista. Käytännössä raerunko on useimmiten edellisten sekamuoto.

### 2.1.2 Huokosveden sitoutuminen

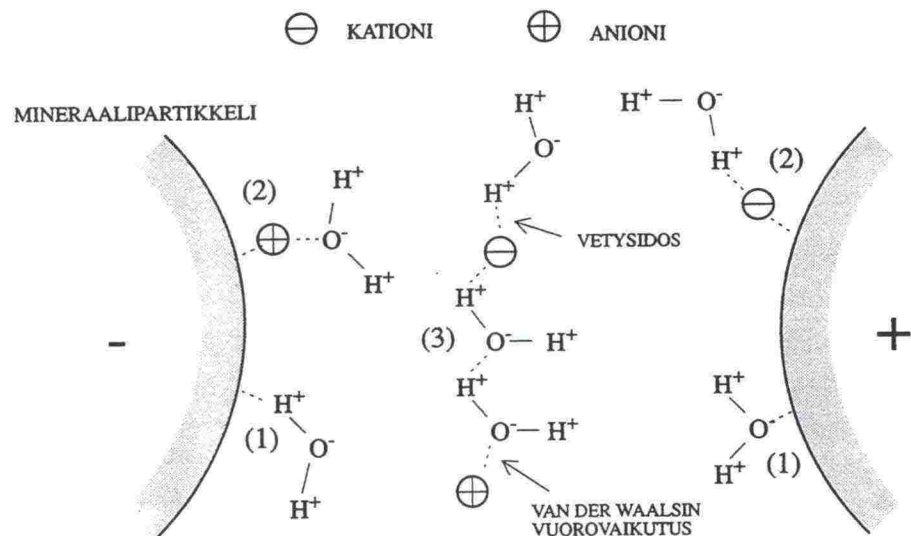
Huokosveden eräs olennainen ominaisuus on sen atomien ja molekyylien sähköinen varautuminen: vesimolekyylin vetyatomit ovat positiivisesti osittaisvarautuneet ja happiatomi negatiivisesti osittaisvarautunut; ioneista kationit ( $\text{Ca}^{2+}$ ,  $\text{Mg}^{2+}$ ,  $\text{H}^+$ ,  $\text{K}^+$ ,  $\text{Na}^+$ ) ovat positiivisesti ja anionit ( $\text{SO}_4^{2-}$ ,  $\text{Cl}^-$ ,  $\text{HCO}_3^-$ ) negatiivisesti varautuneet. Kun lisäksi vesimolekyylit ja ionit ovat kosketuksissa mineraalipartikkeleihin, joilla on joko negatiivinen tai positiivinen pintavaraus, pyrkivät vallitsevat varauserot tasoittumaan. Vastakkaismerkkiset varaukset vetävät toisiaan puoleensa muodostaen sidoksia, joilla on lähtöaineita alempi varaustaso. Syntyneet sidokset ovat ns. heikkoja sidoksia, jotka muodostumistavan mukaan jaetaan vetysidoksiin ja ns. van der Waalsin vuorovaikutuksiin (Kivinen & Mäkitie 1978). Vetysidos esiintyy silloin, kun vety



on samanaikaisesti sitoutunut kahteen tai useampaan elektronegatiiviseen atomiin. Van der Waalsin vuorovaikutuksista tärkeimmät ovat ioni-dipooli, dipooli-dipooli ja dispersiovuorovaikutus.

Huokosveden sitoutumisesta on useita eri teorioita (Kujala 1985). Mineraalipartikkelien, vesimolekyylien ja ionien välisiä todennäköisimpiä sitoutumismuotoja ovat (kuva 2):

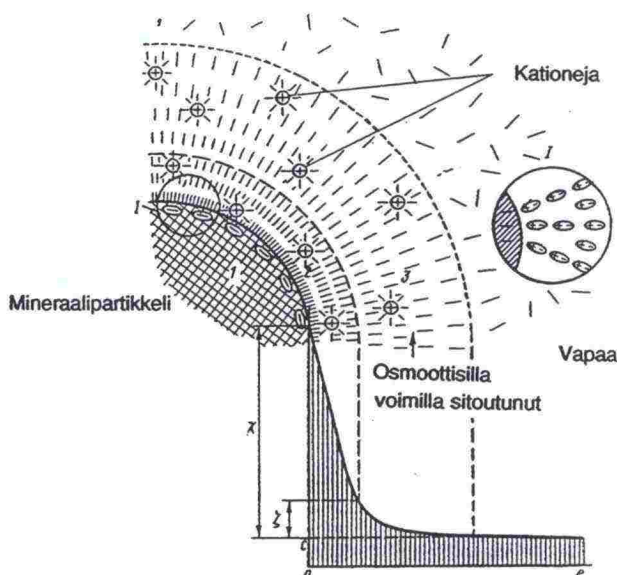
- (1) Vesimolekyylit kiinnittyvät suoraan mineraalipartikkelin pintaan joko vetysidoksilla negatiivisesti varautuneen tai van der Waalsin voimien välityksellä positiivisesti varautuneen mineraalipartikkelin pintaan.
- (2) Vesimolekyylit kiinnittyvät ionien välityksellä mineraalipartikkelin pintaan.
- (3) Vesimolekyylit ja ionit muodostavat keskenään polymeereja eli useiden molekyylien yhteenliittymiä. Ionit ovat hydratoituneessa muodossa, jolloin ionien ja vesimolekyylien välillä on ioni-dipooli -vuorovaikutus



Kuva 2: Mineraalipartikkelien, vesimolekyylien ja ionien välisiä sitoutumismuotoja.

Vesimolekyylit ovat luonteeltaan dipoleja, joten ne pyrkivät järjestäytymään energeettisesti mahdollisimman suotuisasti, mitä kutsutaan ns. orientaatioefektiksi. Useimmille savimineraaleille on ominaista voimakas elektronegatiivisuus, jolloin partikkelin pinnalle syntyvässä varauskentässä vesimolekyylit orientoituvat kentän suuntaisesti (vetyatomit kohti partikkelin pintaa) muodostaen ketjumaisia polymeerejä (Mitchell 1976). Toisaalta negatiivisesti varautunut mineraalipartikkelin pinta vetää puoleensa huokosveden kationeja, jolloin niiden konsentraatio kasvaa partikkelin pinnan läheisyydessä. Syntyneen konsentraatioeron tasoittamiseksi vesimolekyylit pyrkivät diffundoitumaan partikkelin pintaa kohti. Edellisten yhteisvaikutuksesta mineraalipartikkelin pinnalle adsorboituu ohut vesikalvo (Edlefsen & Anderson 1943, Jumiks 1966,

Tsytoich 1975, Kujala 1985). Adsorptiokerroksessa sitoutumisen voimakkuus laskee nopeasti vapaan huokosveden tasolle etäännyttäessä partikkelin pinnasta (kuva 3). Varsinaista rajapintaa adsorptiokerroksen ja vapaan huokosveden välillä ei ole.

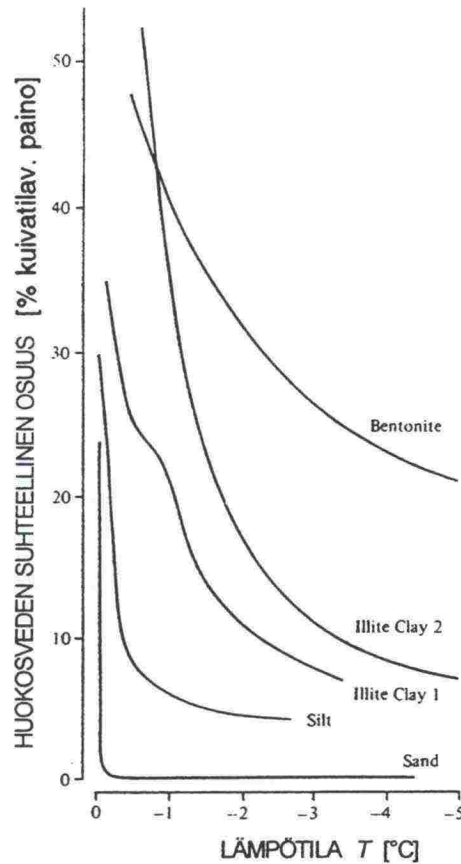


Kuva 3: Huokosveden sitoutuminen mineraalipartikkelin pintaan (Tsytoich 1975).

Vesimolekyylien oletetaan (Young & Warkentin 1975) voivan liikkua suhteellisen vapaasti mineraalipartikkelin pinnan suuntaisesti. Ilmiö selittynee osaksi sillä, että partikkelin pinnan suuntainen varauskenttä on heikko. Esimerkiksi partikkelin pinnalle ketjumaaisesti sitoutuneiden vesimolekyylien varaukset partikkelin pinnan suunnassa ovat samanmerkkiset, jolloin vesimolekyylit pyrkivät hylkimään toisiaan.

### 2.1.3 Huokosjään kiteytyminen

Jää on vetysidoksilla toisiinsa sitoutuneita vesimolekyyliä, mutta poiketen nestemäisen olomuodon rakenteesta jäässä vesimolekyylit ovat järjestäytyneet kiteiksi, jolloin jään rakenne on avoimempi kuin nesteen. Siten jään tiheys on alhaisempi kuin nesteen. Jään eräs ominaisuus on, ettei se reagoi kemiallisesti epäpuhtauksien kanssa eikä muodosta pysyviä yhdisteitä niiden kanssa, vaan epäpuhtaudet kasautuvat muodostaen jäähän huokosia ja koloja (Leppävuori 1973). Täten huokosveden vesimolekyylien ja ionien välisten sidosten purkautumista vaaditaan, jotta vesimolekyylit voisivat kiteytyä jääksi. Ilmiö havaitaan jäätympisteen alenemisena. Yleensä huokosveden ionien konsentraatio on niin alhainen, että jäätympiste alenee vain joitakin kymmenesosa-asteita (Williams 1991). Sitä vastoin huokosveden sitoutumisella mineraalipartikkelin pintaan on huomattava vaikutus jäätymlämpötilaan (kuva 4).



Kuva 4: Eräiden jäätyneiden maalajien suhteellisia vesipitoisuuksia lämpötilan funktiona (Williams 1991).

Useissa tutkimuksissa (Lavrov 1969) on havaittu, että jään pintaa peittää ohut vesikalvo, jonka paksuus lähellä sulamispistettä on muutamia nanometrejä ja joka ohenee lämpötilan laskiessa häviten kokonaan noin -30°C:ssa. Vesikalvon rakenteen oletetaan poikkeavan hyvin paljon tavallisesta veden rakenteesta, mikä mahdollistaa vesikalvon syntymisen jään pintaan.

## 2.2 Faasinmuutoksen termodynamiikkaa

Tarkastellaan faasinmuutosta ilmiöön liittyvien energianmuutosten avulla. Tarkastelu suoritetaan makroskooppisella tasolla käyttäen hyväksi termodynamiikan pääsääntöinä tunnettuja luonnonlakeja. Systeemin tilaa kuvaavat riippumattomat tilamuuttujat, joita ovat ns. kinemaattiset koordinaatit  $a_k$  ja termodynaaminen lämpötila  $T$ . Tilamuuttujat määrittävät tilafunktiot, joita ovat sisäenergia, vapaa energia ja entropia.

Ensimmäisen pääsäännön mukaan on olemassa sisäenergia  $E(a_k, T)$  siten, että

$$dE = dW + dQ. \quad (2.1)$$



Yhtälön (2.1) mukaan systeemin sisäenergian kokonaisdifferentiaali on systeemiin tehdyn differentiaalisen työn ja systeemin saaman differentiaalisen lämmön summa. Jos systeemiin tehty työ on tilavuudenmuutostyötä ( $pVT$ -systeemi,  $E(V, a_2, \dots, S)$ ), voidaan ensimmäinen pääsääntö kirjoittaa muotoon

$$dE = -p dV + dQ. \quad (2.2)$$

Usein termodynamiikassa systeemin tilan määrittämisessä käytetään sisäenergian sijasta entalpiaa eli lämpösisältöä. Entalpian  $H(p, a_2, \dots, S)$  määrittelee yhtälö

$$H = E + pV, \quad (2.3)$$

joten se myös on tilafunktio.

Toinen pääsääntö puolestaan ilmoittaa, että on olemassa entropia  $S(a_2, T)$  siten, että kaikissa todellisissa prosesseissa

$$TdS \geq dQ. \quad (2.4)$$

Entropiaa voidaan pitää epäjärjestyksen mittana, joka kuvaa tilanmuutoksen luonnetta. Lauseketta (2.4) nimitetään myös entropian kasvun periaatteeksi, ja se voidaan esittää edelleen (Ziegler 1983) muodossa

$$dS = d^{(r)}S + d^{(i)}S, \quad (2.5)$$

jossa

$$d^{(r)}S = \frac{dQ}{T} \quad (2.6)$$

on yhtälön (2.5) reversiibeli eli palautuva osa, jota nimitetään systeemin entropian saanniksi ympäristöstä, kun taas

$$d^{(i)}S \geq 0 \quad (2.7)$$

on sen irreversiibeli eli palautumaton osa, jota kutsutaan myös systeemin entropian tuotoksi.

Systeemin fysikaalisia ja kemiallisia muutoksia mitataan Gibbsin vapaan energian avulla. Gibbsin vapaa energia  $G(p, a_2, \dots, T)$  määritetään lausekkeena

$$G = H - TS, \quad (2.8)$$

jossa entalpia ilmoittaa systeemin lämpösisällön ja entropia systeemin epäjärjestyksen suuruuden. Kun systeemin tila muuttuu, se pyrkii toisaalta kohti minimienergiaa eli suurinta stabiiliutta ja toisaalta kohti maksimientropiaa eli suurinta epäjärjестystä. Gibbsin energian muutos  $\Delta G$  määrittää näiden

kahden vastakkaisen pyrkimyksen välisen suhteen ja samalla ilmoittaa voiko prosessi tapahtua spontaanisti vai ei: jos  $\Delta G < 0$ , prosessi etenee spontaanisti kirjoitettuun suuntaan; jos  $\Delta G = 0$ , prosessi on tasapainossa; jos  $\Delta G > 0$ , prosessi etenee spontaanisti käänteiseen suuntaan.

## 2.2.1 Puhdas, sitoutumaton vesi

Faasinmuutoksessa Gibbsin vapaan energian muutos määrittää faasinmuutoslämpötilan: kaksi faasia esiintyy samanaikaisesti tietyssä lämpötilassa, kun faasien Gibbsin vapaat energiat ovat yhtäsuuret ( $\Delta G = 0$ ) (kuva 5). Siten esimerkiksi veden ja jään välillä jäätymispisteessä vallitsee yhteys

$$dG_I = dG_W . \quad (2.9)$$

Veden jäätyminen on *Ehrenfestin* (Swalin 1972) mukaan ensimmäisen asteen faasinmuutos, jolloin faasinmuutoslämpötilassa Gibbsin vapaa energia on jatkuva, mutta sen ensimmäinen derivaatta annetun tilamuuttujan ( $p, V, T$ ) suhteen on epäjatkua. Esimerkiksi lausekkeista

$$\left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_p = -S , \quad (2.10)$$

$$\left[ \frac{\partial (G/T)}{\partial (1/T)} \right]_p = H .$$

nähdään, että systeemin entropiassa ja entalpiassa on epäjatkuvuus faasinmuutoksessa.

Veden ja jään välinen faasinmuutos on tyypillinen reversiibeli prosessi, jota voidaan termodynamiikan keinoin havainnollistaa seuraavasti. Differentioimalla yhtälö (2.3) ja käyttämällä hyväksi yhteyttä (2.2) voidaan lauseke (2.6) saattaa vakioaineessa muotoon

$$d^{(r)}S = \frac{dH}{T} , \quad (2.11)$$

jonka integrointi jäätymispisteessä antaa lausekkeen

$$\int_{jää}^{vesi} d^{(r)}S = \frac{1}{T_0} \int_{jää}^{vesi} dH . \quad (2.12)$$

Kirjoitetaan yhtälö (2.12) edelleen muotoon

$$\Delta^{(r)}S_{T_0} = \frac{L}{T_0} , \quad (2.13)$$

jossa entalpioiden muutosta on merkitty symbolilla  $L$ . Siitä käytetään nimitystä veden sulamislämpö. Jään sulaminen on endoterminen reaktio eli systeemi

sitoo lämpöä, joten yhtälön (2.13) oikea puoli on positiivinen. Vastaavasti veden jäätyminen on eksoterminen reaktio eli systeemistä vapautuu lämpöä, joten yhtälön (2.13) oikean puolen merkki vaihtuu negatiiviseksi.

Edelleen yhtälöiden (2.2) ja (2.6) avulla voidaan lausekkeen (2.8) differentiaali kirjoittaa muotoon

$$dG = Vdp - SdT . \quad (2.14)$$

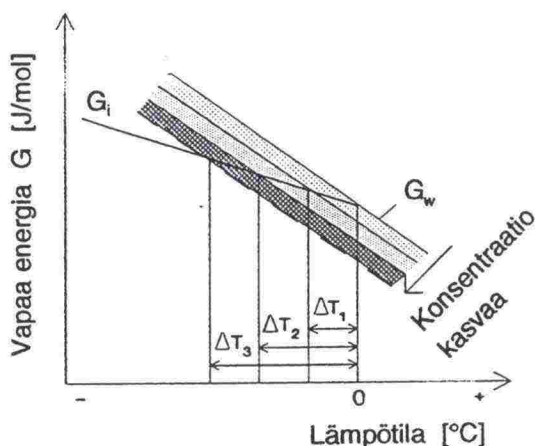
Kun lauseke (2.14) sijoitetaan yhtälöön (2.9) ja saatuun lausekkeeseen sovelletaan yhtälöitä (2.11)...(2.13), saadaan lopulta veden ja jään välistä tasapainotilaa kuvaava, Clausius-Clapeyronin yhtälönä tunnettu lauseke

$$V_w dp_w - V_i dp_i = \frac{L}{T_0} dT . \quad (2.15)$$

## 2.2.2 Huokosveden jäätyminen

Edellä tarkasteltiin ns. puhtaan, vapaan veden faasinmuutosta, joka on reversiibeli ja isoterminen prosessi. Mutta kuten jo aikaisemmin (kuva 4, Williams 1991) todettiin, huokosvesi jäätyy asteittain. Tämä selittyy osaksi ionien hydrataatiolla ja osaksi huokosveden sitoutumisella mineraalipartikkeleihin.

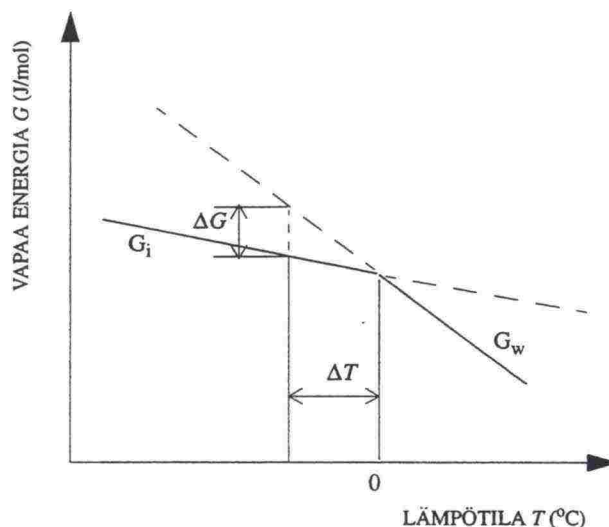
Vesimolekyylien sitoutuminen ionien kanssa laskee huokosveden Gibbsin vapaan energian tasoa, ja jotta ehto (2.9) toteutuisi, täytyy jäätymislämpötilan laskea (kuva 5). Mitä suurempi on ionien konsentraatio ja mitä voimakkaammin vesimolekyylit ovat sitoutuneet ionien kanssa sitä alempi huokosveden vapaan energian taso on ja edelleen sitä alhaisemman lämpötilan huokosvesi vaatii jäätyäkseen. Ionien hydrataatio laskee siis jäätymislämpötilaa, mutta muutoin jäätymisprosessi on samanlainen kuin puhtaalla vedellä.



Kuva 5: Veden Gibbsin vapaa energia lämpötilan funktiona ja ionien hydrataation vaikutus jäätymispisteeseen (Kujala 1991).



Adsorboituneen huokosveden jäätymisprosessin kulkua on havainnollistettu kuvassa 6. Ajatellaan, että huokosveden adsorptioon liittyy tietty sidosenergia, joka on mittana sille, kuinka voimakkaasti huokosvesi on sitoutunut mineraalipartikkelin pintaan. Jotta adsorboitunut huokosvesi jäätynä, tarvitaan sitoutumisen purkamiseen tietty energia. Kun lämpötila laskee alle normaalin jäätympisteen huokosveden pysyessä nestemäisenä, joutuu huokosvesi alijäähtyneeseen tilaan. Tällöin faasien vapaiden energioiden välille muodostuu lämpötilan alenemisesta riippuva ero  $\Delta G < 0$ . Kun energiaero  $\Delta G$  on riittävä suuri sidosenergiaan nähden, tapahtuu spontaani, irreversiibeli huokosveden jäätyminen. Mitä voimakkaammin huokosvesi on sitoutunut sitä suurempi energiaero  $\Delta G$  vaaditaan, ja edelleen yhä alhaisempi lämpötila tarvitaan, jotta huokosvesi jäätynä. Vastaavan tyyppistä ilmiötä ovat Ozawa & Kinoshita (1989) tutkineet kokeellisesti.



Kuva 6: Mineraalipartikkeleihin adsorboituneen huokosveden jäätymisprosessi esitettyä Gibbsin vapaan energian avulla.

Jäätymisprosessin irreversiibelius voidaan osoittaa tutkimalla systeemin entropian muutoksia (Swalin 1972). Täten edellä esitetty Clausius-Clapeyronin yhtälö (2.15) ei tarkasti ottaen sovellu adsorboituneen huokosveden ja jään välisen tasapainotilan kuvaamiseen.

### 2.3 Veden liike

Vesi voi liikkua jäätyvässä maassa kaikissa olomuodoissaan: vesihöyrynä, nesteinä tai jäinä. Veden liikettä voivat aiheuttaa lämpötilaerot, adsorptiovoimat, kapillaariset voimat, osmoottiset voimat, jäätymisessä syntyvät imuvoimat sekä ulkoiset voimat kuten esimerkiksi painovoima. Edlefsenin & Andersonin (1943) mukaan on mahdollista tarkastella veden liikettä Gibbsin vapaan energian avulla. Veden vapaan energian taso voidaan määrittää

jäätyvän maan eri osissa, ja mikäli se on sama kaikkialla, vesi on levossa. Jos taas esimerkiksi osan A vapaa energia on suurempi kuin osan B, vesi alkaa siirtyä osasta A osaan B pyrkien tasoittamaan osien välisen energiaeron. Siten energiaerojen vallitessa vesi siirtyy aina kohti alinta vapaan energian tasoa, kunnes energiaerot ovat tasoittuneet.

Vesi liikkuu maassa verrattain hitaasti. Siten liikettä voidaan kuvata matemaattisesti (Edlefsen & Anderson 1943, Tsytoich 1975) puoliempiirisellä yhtälöllä

$$\vec{i}_{mig} = -K \text{grad}(\Delta G), \quad (2.16)$$

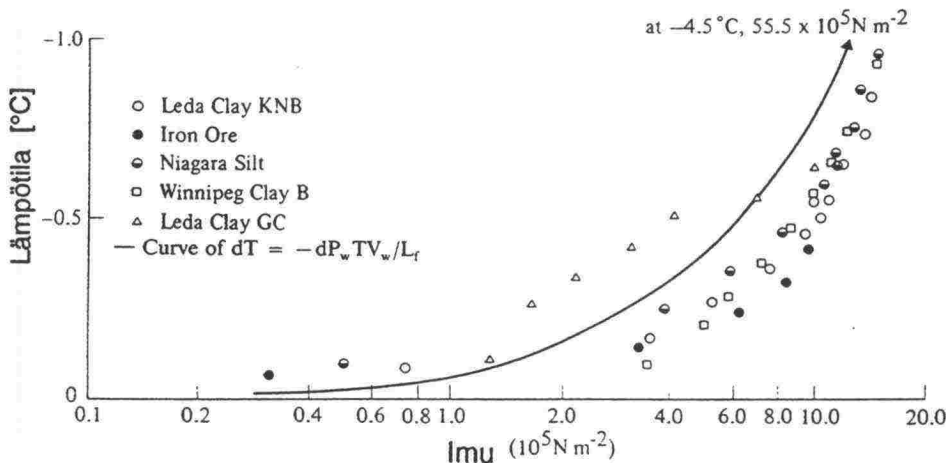
jossa veden siirtymisnopeus  $\vec{i}_{mig}$  on verrannollinen energiaeron  $\Delta G$  negatiiviseen gradienttiin. Suure  $K$  esittää suhteellista kerrointa, joka ottaa huomioon veden siirtymistä vastustavat tekijät.

Vedellä kyllästyneen sulan maan tapauksessa yhtälö (2.16) määrittää huokosveden virtaamanopeuden huokosvedessä vallitsevan paineen gradientin funktiona:

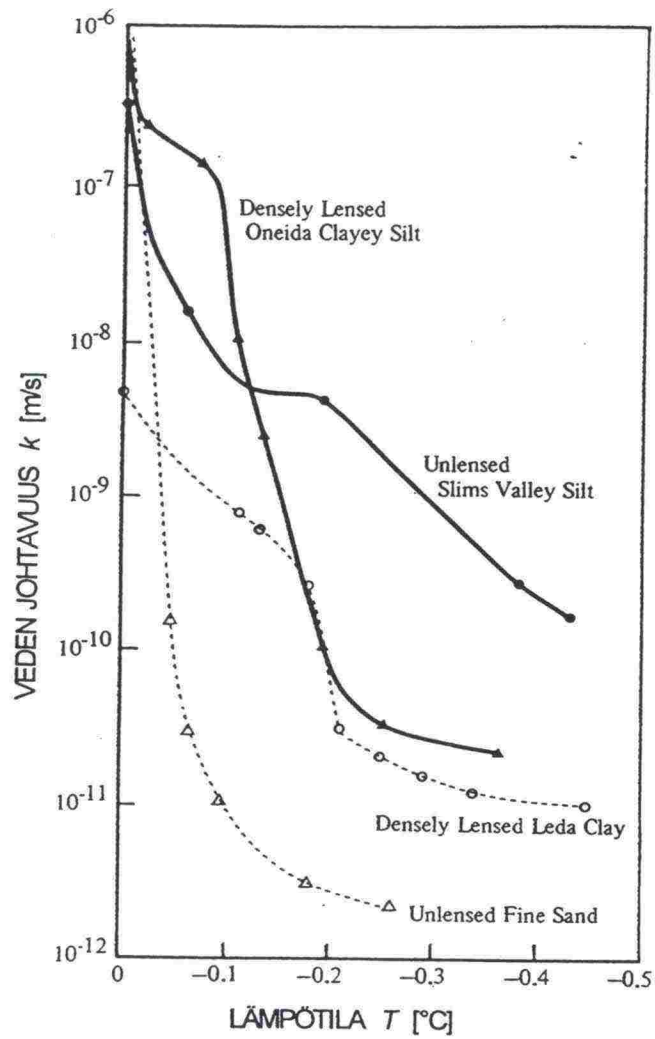
$$\vec{q} = -\vec{K}(\text{grad} p_w - \rho^w \vec{g}). \quad (2.17)$$

Yhtälö (2.17) tunnetaan Darcyn lakina, jossa tensori  $\vec{K}$  kuvaa huokoisen maan veden läpäisevyyttä.

Huokosveden jäätyminen aiheuttaa imun, joka havaitaan huokosveden paineen alenemisena. Imu on huokosveden virtauksen käynnistävä voima, ja sen suuruuden on todettu (Williams 1991) riippuvan lämpötilasta (kuva 7). Toisaalta jää täyttää osan huokosista kasvattaen huokosveden virtauksen vastustusta (kuva 8). Näiden ilmiöiden yhteisvaikutuksesta huokosvesi saa tietyn virtaamanopeuden.



Kuva 7: Huokosveden jäätymisessä syntyvän imun riippuvuus lämpötilasta (Williams 1991).



Kuva 8: Erialaisten jäätyneiden maalajien veden johtavuus lämpötilan funktiona (Williams 1991).



### 3 MAAN JÄÄTYMISEN MEKANIikka

Jäätyneen maan ajatellaan olevan seos, jossa kukin faasi eli komponentti on jatkuvasti jakautunut. Tällöin maata voidaan käsitellä kontinuumina eli jatkuvana aineena. Kontinuumimallia käyttävän mekaniikan eli ns. kontinuumimekaniikan perustana ovat yleiset aksioomat eli peruslait, jotka antavat osan vallitsevista yhtälöistä. Ne eivät kuitenkaan riitä, vaan lisäksi tarvitaan ns. konstitutiivisia yhteyksiä, jotka pyrkivät kuvaamaan eri tapauksissa kulloinkin esiintyvien materiaalien käyttäytymistä (Salonen 1987). Seuraava tarkastelu noudattaa Mikkolan (Frémond & Mikkola 1991) esitystä raerungon, huokosveden ja huokosjään muodostaman seoskontinuumin termomekaanisten riippuvuuksien määrittämiseksi.

#### 3.1 Kinematiikka

##### Raerungon, huokosveden ja -jään tilavuusosat

Jäätyvä maa on kolmikomponenttinen seos, jonka matemaattisessa mallinnuksessa operoidaan komponenttien tilavuusosien avulla. Tämän mahdollistaa oletus, että komponenttien tiheydet ovat vakioita. Muutoin operoitaisiin komponenttien massaosuuksilla. Raerungon, huokosveden ja huokosjään tilavuusosat määritetään komponentin tilavuuden ja kokonaistilavuuden välisenä suhteena:

$$\beta^k = \frac{V^k}{V}, \quad k \in \{s, w, i\}. \quad (3.1)$$

Tilavuusosat toteuttavat ehdot

$$\beta^s + \beta^w + \beta^i = 1, \quad \beta^s \geq 0, \quad \beta^w \geq 0, \quad \beta^i \geq 0. \quad (3.2)$$

##### Huokosveden ja -jään suhteelliset nopeudet

Seosten yhteydessä käytetään yleensä joko tietyn komponentin tai seoksen suhteen määriteltyjä nopeuksia. Jäätyvän maan tarkastelussa käytetään raerungon suhteen määriteltyjä huokosveden ja huokosjään suhteellisia nopeuksia:

$$V_i^k = U_i^k - U_i^s, \quad k \in \{w, i\}. \quad (3.3)$$

##### Deformaationopeus

Komponentin deformaationopeus on sen nopeusgradientin symmetrinen osa:

$$d_{ij}^k = U_{(j,i)}^k = \frac{1}{2} (U_{j,i}^k + U_{i,j}^k), \quad k \in \{s, w, i\}. \quad (3.4)$$

### Venymätensori

Jäätyvän maan siirtymien voidaan olettaa olevan pieniä, jolloin komponentin venymätensori on sen muodonmuutosgradientin symmetrinen osa:

$$\epsilon_{ij}^k = u_{(j,i)}^k = \frac{1}{2} (u_{j,i}^k + u_{i,j}^k) , \quad k \in \{s, w, i\} . \quad (3.5)$$

Deformaationopeuden ja venymätensorin välillä on sellainen yhteys, että käytettäessä Lagrangen esitystapaa venymätensorin ainederivaatta on deformaationopeus:

$$\epsilon_{ij}^{k*(k)} = d_{ij}^k , \quad k \in \{s, w, i\} . \quad (3.6)$$

### Ainederivaatta

Komponentin mielivaltaisen ajan ja paikan funktion muutosnopeus eli ainederivaatta on yleisessä muodossa

$$t_{kl\dots n}^{j*(k)} = t_{kl\dots n,0}^j + t_{kl\dots n,j}^j U_j^k . \quad (3.7)$$

Tämä on komponentin mukana kulkevan havaitsijan mittaama aikaderivaatta.

### Tilavuusintegraalin ainederivaatta

Eulerin esitystä käytettäessä joudutaan laskemaan tilavuusintegraalien muutosnopeuksia eli ainederivaattoja:

$$T_{kl\dots n}^{j*(k)} = \left( \int_{\Omega} t_{kl\dots n}^j d\Omega \right)^{*(k)} . \quad (3.8)$$

Tilavuusintegraalin ainederivaatta voidaan johtaa Leibnitzin säännön avulla (Salonen 1987) muotoon

$$T_{kl\dots n}^{j*(k)} = \int_{\Omega} t_{kl\dots n,0}^j d\Omega + \int_{\partial\Omega} t_{kl\dots n}^j U_j^k v_j d\Gamma , \quad (3.9)$$

joka tunnetaan ns. Reynoldsin kuljetuslauseena.

### Gaussin lause

Gaussin lause on muunnoskaava, jota käyttäen funktion tilavuusintegraali muunnetaan pintaintegraaliksi tai päinvastoin. Gaussin lause esitetään yhtälönä

$$\int_{\Omega} t_{kl\dots n,j} d\Omega = \int_{\partial\Omega} t_{kl\dots n} v_j d\Gamma . \quad (3.10)$$

Lauseen (3.10) johto edellyttää, että funktiot ovat jatkuvia.



## 3.2 Kinetiikka

### 3.2.1 Yleinen säilymislaki

Kontinuumimekaniikan yleinen säilymislaki seoskontinuumin komponentille (Germain 1983) voidaan esittää symbolisesti yhtälöllä

$$\left( \int_{\Omega} A_{\alpha} d\Omega \right)' = - \int_{\partial\Omega} j_{\alpha\beta} v_{\beta} d\Gamma + \int_{\Omega} B_{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{A}_{\alpha} d\Omega. \quad (3.11)$$

Kun otetaan käyttöön Gaussin lause (3.10) voidaan yleinen säilymislaki (3.11) kirjoittaa Reynoldsin kuljetuslauseen (3.9) avulla paikalliseen muotoon

$$A_{\alpha,0} + (A_{\alpha} U_{\beta} + j_{\alpha\beta})_{,\beta} - B_{\alpha} = \tilde{A}_{\alpha}. \quad (3.12)$$

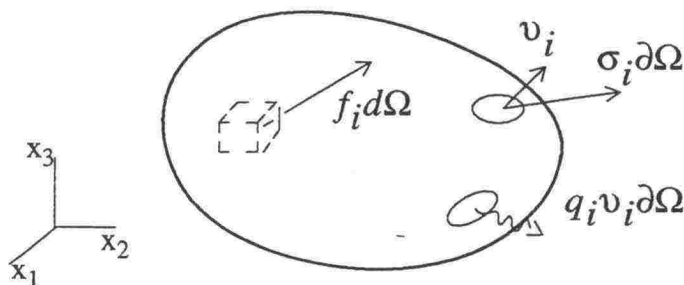
Yhtälön (3.12) eri termien merkitykset ovat seuraavat:

- $A_{\alpha}$  on tarkasteltava vektori- tai skalaariarvoinen suure
- $j_{\alpha\beta}$  on vuo kontrollialueen pinnan läpi
- $B_{\alpha}$  on saanti, mikä ottaa huomioon ympäristön vaikutuksen
- $\tilde{A}_{\alpha}$  on tarkasteltavan suureen tuntematon tuotto, joka voi johtua kemiallisesta reaktiosta tai biologisesta ilmiöstä.

Tarkastellaan jäätynyttä maata kontinuumikappaleena, johon vaikuttavat kuvan 9 mukaiset voimat. Yleisen säilymislain (3.11) avulla voidaan esittää kontinuumimekaniikan peruslait jäätävälle maalle siten, että

$$\tilde{A}_{\alpha}^s + \tilde{A}_{\alpha}^w + \tilde{A}_{\alpha}^i = 0. \quad (3.13)$$

Seuraavassa esitetään yleisen säilymislain (3.11)...(3.13) avulla jäätävän maan massan säilymislait, liikemäärän taseen periaate ja energian taseen periaate; lisäksi sitä käytetään myös entropian kasvun periaatteen muodostamiseksi. Tarkastellaan jäätynyttä maata kontinuumikappaleena, johon vaikuttavat kuvan 9 mukaiset voimat.



Kuva 9: Kontinuumikappaleeseen vaikuttavat voimat.

### 3.2.2 Massan säilyminen

Jäätyvässä maassa kullekin komponentille on voimassa massan taseen periaate, kun otetaan huomioon komponentin mahdollinen massan tuotto aikaa ja tilavuutta kohti. Komponentin massan  $\beta^k \rho^k$  taseyhtälön määrittämiseksi kirjoitetaan vastaavuudet

$$\begin{aligned} A_\alpha &\triangleq \beta^k \rho^k \\ j_{\alpha\beta} &\triangleq 0 \\ B_\alpha &\triangleq 0 \\ \tilde{A}_\alpha &\triangleq \theta^k . \end{aligned}$$

Sijoittamalla vastaavuudet yhtälöön (3.11) saadaan komponentin massan säilymiselle taseyhtälö

$$\left( \int_\Omega \rho^k \beta^k d\Omega \right)^{*(k)} = \int_\Omega \theta^k d\Omega , \quad (3.14)$$

joka edelleen voidaan saattaa yhtälön (3.12) mukaiseen paikalliseen muotoon

$$\theta^k = (\rho^k \beta^k)_{,0} + (\rho^k \beta^k U_i^k)_{,i} . \quad (3.15)$$

Maan jäätyessä raerungossa ei tapahdu massan tuottoa ja jäätyvä huokosvesi muuttuu täysin huokosjääksi, joten komponenttien massan tuotoille voidaan kirjoittaa ehdot

$$\begin{aligned} \theta^s &= 0 , \\ \theta^w + \theta^i &= 0 , \end{aligned} \quad (3.16)$$

jotka muodostavat jäätyvän maan massan säilymisen periaatteen.

### 3.2.3 Liikemäärän tase

Jäätyvä maa on kontinuumikappale, johon vaikuttavat ulkoiset voimat koostuvat massavoimista ja pintavoimista (kuva 9). Massavoima syntyy maan gravitaatiosta. Koska komponenttien tiheyksiä pidetään vakioina, voidaan operoida kappalevoimien avulla. Komponentin kappalevoima on komponentin massa kerrottuna putoamiskiihtyvyydellä:

$$f_i^k = \beta^k \rho^k g_i \quad (3.17)$$

Pintavoimat ovat kosketusvoimia, jotka esittävät ympäristön vaikutusta kontinuumikappaleeseen. Pintavoimaa pinta-alaa kohti  $\sigma_i^{(j)}$  nimitetään jännitysvektoriksi tai traktioksi, joka riippuu paikasta, ajasta ja pinta-alkion suunnasta. Sen komponentteja  $\sigma_{ij}$  ovat normaalijännitykset ( $i=j$ ) ja leikkausjännitykset ( $i \neq j$ ). Traktion ja sen komponenttien välillä on yhteys

$$\sigma_i^{(v)} = \sigma_{ij} v_j . \quad (3.18)$$

Jännityskomponentit muodostavat jännitystensorin  $\sigma_{ij}$ , joka voidaan jakaa deviaatio-osaan ja isotrooppiseen osaan:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p \delta_{ij} , \quad p = -\frac{1}{3} \sigma_{kk} . \quad (3.19)$$

Komponentin liikemäärän  $\beta^k \rho^k U_i^k$  taseyhtälön kirjoittamiseksi käytetään vastaavuuksia

$$\begin{aligned} A_\alpha &\triangleq \beta^k \rho^k U_i^k \\ J_{\alpha\beta} &\triangleq \sigma_{ij}^k \\ B_\alpha &\triangleq f_i^k \\ \tilde{A}_\alpha &\triangleq m_i^k . \end{aligned}$$

Siten komponentin liikemäärän taseelle saadaan lauseke

$$\left( \int_\Omega \beta^k \rho^k U_i^k d\Omega \right)^{(k)} = - \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^k v_j d\Gamma + \int_\Omega f_i^k d\Omega + \int_\Omega m_i^k d\Omega , \quad (3.20)$$

ja sitä vastaava paikallinen muoto

$$m_i^k = -\sigma_{ij,j}^k - f_i^k + (\rho^k \beta^k U_i^k)_{,0} + (\rho^k \beta^k U_i^k U_j^k)_{,j} , \quad (3.21)$$

joka voidaan yhtälöiden (3.7) ja (3.15) avulla kirjoittaa edelleen muotoon

$$m_i^k = -\sigma_{ij,j}^k - f_i^k + \rho^k \beta^k U_i^{k*} + \theta^k U_i^k . \quad (3.22)$$

Liikemäärän tuotolle on voimassa ehto

$$m_i^s + m_i^w + m_i^i = 0 , \quad (3.23)$$

joka on samalla jäätyvän maan liikemäärän taseen periaate.

### 3.2.4 Energian tase

Kontinuumikappaleen energian tase koostuu ulkoisten voimien tehosta, kappaleen saamasta lämpötehosta sekä kappaleen liike-energiasta ja sisä-energiasta. Määritetään nämä aluksi yleisessä muodossa.

Kappaleen ulkoisten voimien teho koostuu kappalevoimien tehosta ja pinta-voimien tehosta:

$$P_{ext} = \int_\Omega f_i U_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} v_j U_i d\Gamma . \quad (3.24)$$

Kappaleen liike-energia määritellään lausekkeella

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho U_i U_i d\Omega . \quad (3.25)$$

Kappaleen lämpöteho on sen reunojensa kautta saama lämpövirta lisättynä komponentin sisällä tapahtuva lämmön kehittyminen:

$$Q^* = - \int_{\partial\Omega} v_i q_i d\Gamma + \int_{\Omega} r d\Omega . \quad (3.26)$$

Sisäenergia muodostuu makroskooppisesti näkymättömien energiamuotojen summasta: molekyylien satunnaisliikkeiden liike-energia, molekyylien välisten voimien potentiaalienergiat ym. hiukkasten vastaavat osuudet (Salonen 1987). Kun merkitään kappaleen sisäenergiaa tilavuudella jaettuna eli ns. ominais-sisäenergiaa tunnuksella  $e$ , saadaan kappaleen sisäenergia lausekkeena

$$E = \int_{\Omega} e d\Omega . \quad (3.27)$$

Kappaleen energian taseen periaate voidaan esitetään yleisessä muodossa yhtälöllä

$$P_{ext} + Q^* = E^* + T^* . \quad (3.28)$$

Seoskontinuumin komponentin energian taseyhtälö puolestaan voidaan kirjoittaa yleisen säilymislain avulla käyttämällä vastaavuuksia

$$\begin{aligned} A_{\alpha} &\triangleq e^k + \frac{1}{2} \beta^k \rho^k U_i^k U_i^k \\ j_{\alpha\beta} &\triangleq q_i^k - \sigma_{ij}^k U_j^k \\ B_{\alpha} &\triangleq f_i^k U_j^k + r^k \\ \tilde{A}_{\alpha} &\triangleq \ell^k , \end{aligned}$$

jotka saadaan vertaamalla yhtälöitä (3.11) ja (3.28) keskenään. Siten komponentin energian taseelle saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} \left[ \int_{\Omega} \left( e^k + \frac{1}{2} \beta^k \rho^k U_i^k U_i^k \right) d\Omega \right]^{*(k)} &= - \int_{\partial\Omega} \left( q_j^k - \sigma_{ij}^k U_i^k \right) v_j d\Gamma + \\ &+ \int_{\Omega} \left( f_i^k U_i^k + r^k \right) d\Omega + \int_{\Omega} \ell^k d\Omega . \end{aligned} \quad (3.29)$$



Paikalliseksi muodoksi saadaan suoraan yhtälön (3.12) mukaan lauseke

$$\begin{aligned} \ell^k = & \left( e^k + \frac{1}{2} \beta^k \rho^k U_i^k U_i^k \right)_{,0} + \left\{ \left( e^k + \frac{1}{2} \beta^k \rho^k U_i^k U_i^k \right) U_j^k + \right. \\ & \left. + q_j^k - \sigma_{ij}^k U_i^k \right\}_{,j} - f_i^k U_i^k - r^k , \end{aligned} \quad (3.30)$$

jota voidaan muokata yksinkertaisempaan muotoon käyttämällä yhtälöitä (3.7) ja (3.21) sekä jättämällä pois merkitykseltään vähäiset hitaustermit ja kineettisen energian osuus. Siten saadaan yhtälö

$$\ell^k = e^{k \cdot (k)} + e^k U_{i,i}^k - \sigma_{ij}^k q_{ij}^k + m_i^k U_i^k + q_{i,i}^k - r^k . \quad (3.31)$$

Systeemin energian tuotolle on voimassa ehto

$$\ell^s + \ell^w + \ell^i = 0 , \quad (3.32)$$

joka on jäätyvän maan energian taseen periaate.

### 3.2.5 Entropian kasvu

Kuten jo luvussa 2.2 todettiin, entropia on systeemin epäjärjestyksen mitta. Kun huokosvesi jäätyy, molekyylien liikkumavapaus vähenee ja samanaikaisesti vähenee myös entropia ts. epäjärjestys. Entropian kasvun periaate määritettiin yhtälönä (2.4), joka tunnetaan myös Clausius-Duhemin epäyhtälönä. Entropian kokema muutos eli ainederivaatta puolestaan saadaan jakamalla yhtälö (2.4) puolittain ajalla  $dt$ , mikä antaa lausekkeen

$$TS^* \geq Q^* . \quad (3.33)$$

Yhtälö (3.33) voidaan jakaa edelleen yhtälön (2.5) mukaisesti palautuvaan ja palautumattomaan muutokseen:

$$S^* = S^{*(x)} + S^{*(i)} , \quad (3.34)$$

missä

$$S^{*(x)} = \frac{Q^*}{T} \quad \text{ja} \quad S^{*(i)} \geq 0 . \quad (3.35)$$

Entropian muutoksen reversiibeli osa voidaan kirjoittaa yhtälön (3.26) avulla myös lausekkeena

$$S^{*(x)} = - \int_{\partial \Omega} \frac{q_i}{T} v_i d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{r}{T} d\Omega . \quad (3.36)$$

Merkitään kappaleen entropiaa tilavuudella jaettuna eli ns. ominaisentropiaa tunnuksella  $s$ . Kappaleen entropia saadaan siten lausekkeena

$$S = \int_{\Omega} s \, d\Omega . \quad (3.37)$$

Jäätyvän maan kunkin komponentin entropian muutosyhtälö voidaan kirjoittaa yleistä säilymislakia käyttäen, kun käytetään vastaavuuksia

$$\begin{aligned} A_{\alpha} &\triangleq S^k \\ j_{\alpha\beta} &\triangleq \frac{q_j^k}{T} \\ B_{\alpha} &\triangleq \frac{r^k}{T} \\ \tilde{A}_{\alpha} &\triangleq \gamma^k . \end{aligned}$$

Siten voidaan komponentin entropian kehittymiselle esittää yleiselle säilymis-laille (3.11) analoginen taseyhtälö

$$\left( \int_{\Omega} s^k \, d\Omega \right)^{\bullet(k)} = - \int_{\partial\Omega} \frac{q_j^k}{T} v_j \, d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{r^k}{T} \, d\Omega + \int_{\Omega} \gamma^k \, d\Omega , \quad (3.38)$$

jonka paikallinen muoto on

$$\gamma^k = s_{,0}^k + (s^k U_j^k)_{,j} + \left( \frac{q_j^k}{T} \right)_{,j} - \frac{r^k}{T} . \quad (3.39)$$

Käytetään Gibbsin vapaan energian sijasta nyt Helmholtzin vapaata energiaa, joka määritetään yhtälönä

$$\psi^k = e^k - T s^k . \quad (3.40)$$

Tällöin paikallista muotoa (3.39) voidaan kehittää edelleen yhtälöiden (3.31) ja (3.40) avulla. Siten saadaan tulos

$$\begin{aligned} T \gamma^k &= \sigma_{ij}^k d_{ij}^k - \left( \psi^{k \bullet(k)} + s^k T^{\bullet(k)} \right) - \psi^k U_{j,j}^k + \\ &\quad - m_j^k U_j^k - \frac{q_j^k T_{,j}}{T} + \ell^k . \end{aligned} \quad (3.41)$$

Entropian kasvun periaatteen (3.33) mukaan jäätyvän maan entropian kehitty-misen tulee olla ei-negatiivinen eli

$$T(\gamma^s + \gamma^w + \gamma^i) \geq 0 . \quad (3.42)$$

Tämä on jäätyneen maan Clausius-Duhemin epäyhtälö, jonka tulee toteutua kaikissa jäätymisprosessin vaiheissa. Epäyhtälön vasenta puolta kutsutaan

myös dissipaatioksi, joka voidaan edelleen jakaa sisäiseen dissipaatioon

$$\bar{d}'_1 = \sum_k \left\{ \sigma_{ij}^k d_{ij}^k - \psi^{k \bullet (k)} - S^{kT \bullet (k)} - \psi^k U_{j,j}^k - m_j^k U_j^k \right\} \quad (3.43)$$

ja termiseen dissipaatioon

$$\bar{d}'_2 = - \sum_k \frac{q_j^{kT,j}}{T} . \quad (3.44)$$

Tällöin epäyhtälö pätee erikseen sekä sisäiselle että termiselle dissipaatiolle:

$$\bar{d}'_1 \geq 0 \quad ja \quad \bar{d}'_2 \geq 0 , \quad (3.45)$$

Todettakoon, että epäyhtälö on voimakkaampi yhtälöissä (3.45) kuin yhtälössä (3.42).

### 3.3 Konstitutiiviset yhteydet

#### 3.3.1 Konstitutiivisten yhtälöiden muodostaminen

Edellä esitetyt perusyhtälöt ovat yleisiä siinä mielessä, että ne ovat voimassa mielivaltaiselle kolmikomponenttiselle seoskontinuumille, jonka kahden komponentin välillä voi tapahtua faasinmuutos. Jotta maan käyttäytyminen mekaanisten rasitusten sekä lämpötilamuutosten ja faasinmuutosten alaisena voitaisiin laskennallisesti esittää, tarvitaan maan ja sen komponenttien fysikaalisia ominaisuuksia kuvaavia tunnuslukuja sekä näiden riippuvuuksia toisistaan eli ns. konstitutiivisia yhteyksiä. Clausius-Duhemin epäyhtälö ei suoraan anna konstitutiivisia yhteyksiä, vaan pikemminkin ehdon, jonka tulee toteutua prosessin kaikissa vaiheissa. Konstitutiiviset yhteydet määritetään valitsemalla tarvittavat tilaa ja dissipaatiivista käyttäytymistä kuvaavat muuttujat sekä sopivat vapaan energian ja dissipaatiopotentialien kuvaukset.

Valitaan jäätyvän maan tilamuuttujiksi suureet

$$\{ T, \beta^s, \beta^w, \beta^i, \epsilon_{ij}^s, \epsilon_{ij}^i \} \quad (3.46)$$

ja vapaan energian tilafunktioiksi lausekkeet

$$\begin{aligned} \psi^s &= \psi^s(T, \beta^s, \beta^w, \beta^i, \epsilon_{ij}^s) \\ \psi^w &= \psi^w(T, \beta^s, \beta^w, \beta^i) \\ \psi^i &= \psi^i(T, \beta^s, \beta^w, \beta^i, \epsilon_{ij}^i) . \end{aligned} \quad (3.47)$$

Komponenttien tilavuusosat  $\beta^k$  eivät ole riippumattomia, vaan niitä sitovat rajoitteet (3.2), jotka otetaan huomioon lisäämällä indikaattorifunktio



$I(\beta^s, \beta^w, \beta^i)$  komponenttien vapaiden energioiden summaan. Siten seoskontinuumin vapaa energia saadaan lausekkeena

$$\psi = \sum_k \psi^k + T I(\beta^s, \beta^w, \beta^i) . \quad (3.48)$$

Indikaattorifunktio on kerrottu lämpötilalla, jotta saataisiin sellainen sisäenergian funktio, joka ei sisällä indikaattorifunktiota. Indikaattorifunktio on funktio  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  (Frémond & Nicolas 1990)

$$I(\beta^s, \beta^w, \beta^i) = \begin{cases} 0, & \text{jos } (\beta^s, \beta^w, \beta^i) \in C \\ +\infty, & \text{jos } (\beta^s, \beta^w, \beta^i) \notin C \end{cases} \quad (3.49)$$

Joukko  $C \subset \mathbb{R}^3$  on konveksinen joukko (liite 1), jonka määrittävät sisäiset rajoitteet (3.2):

$$C = \left\{ (\beta^s, \beta^w, \beta^i) \in \mathbb{R}^3 \mid \beta^s + \beta^w + \beta^i = 1, \right. \\ \left. \beta^s \geq 0, \beta^w \geq 0, \beta^i \geq 0 \right\} \quad (3.50)$$

Siten rajoitteita voidaan pitää materiaaliominaisuuksina, ja indikaattorifunktiota käyttäen vapaa energia pakotetaan saamaan vain luullisia, rajoitteet täyttäviä arvoja.

Sisäisen dissipaation lausekkeessa (3.43) joudutaan laskemaan vapaan energian ainederivaattoja. Ne saadaan valintoja (3.47) käyttämällä kokonais-differentiaalina

$$\psi^{k \bullet(k)} = \frac{\partial \psi^k}{\partial T} T^{\bullet(k)} + \frac{\partial \psi^k}{\partial \beta^j} \beta^{j \bullet(k)} + \frac{\partial \psi^k}{\partial \varepsilon_{ij}^k} d_{ij}^k . \quad (3.51)$$

Esityksen (3.51) lyhentämiseksi otetaan käyttöön merkintä

$$B^{kj} = \frac{\partial \psi^k}{\partial \beta^j} . \quad (3.52)$$

Indikaattorifunktion suhteen menetellään siten, että se lisätään raerungon vapaan energiaan. Kuten määritelmästä (3.49) nähdään, indikaattorifunktio ei ole sileä muuttujiensa suhteen: se voi hypätä määrätystä arvosta  $+\infty$ een. Tällöin ongelmana on indikaattorifunktion differentiaalien määrittäminen. Ongelmaa on selvitetty liitteessä 1, jonka perusteella esitetään, että subgradientti  $\hat{B}^k$  on subdifferentiaalijoukon  $\partial I$  alkio:

$$(\hat{B}^s, \hat{B}^w, \hat{B}^i) \in \partial I(\beta^s, \beta^w, \beta^i) . \quad (3.53)$$

Yhdistämällä yhtälöt (3.3) ja (3.7) voidaan komponentin tilavuusosan ainederi-



vaatta kirjoittaa raerungon ainederivaatan ja komponentin suhteellisen nopeuden avulla. Siten saadaan dissipaation esittämiseksi tärkeä yhtälö

$$\beta^{j*(k)} = \beta^{j*(s)} + V_i^k \beta_{,i}^j. \quad (3.54)$$

Kun lisäksi käytetään tunnettua (Ziegler 1983) yhteyttä

$$\frac{\partial \psi^k}{\partial T} = -S^k, \quad (3.55)$$

voidaan sisäinen dissipaatio (3.43) kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 = & \sigma_{ij}^s d_{ij}^s - \frac{\partial \psi^s}{\partial e_{ij}^s} d_{ij}^s - \psi^s U_{i,i}^s - (B^{ss} + \hat{B}^s + B^{ws} + B^{is}) \beta^{s*(s)} + \\ & + \sigma_{ij}^w d_{ij}^w - \psi^w U_{i,i}^w - (B^{sw} + \hat{B}^w + B^{ww} + B^{iw}) \beta^{w*(w)} + \\ & + \sigma_{ij}^i d_{ij}^i - \frac{\partial \psi^i}{\partial e_{ij}^i} d_{ij}^i - \psi^i U_{i,i}^i - (B^{si} + \hat{B}^i + B^{wi} + B^{ii}) \beta^{i*(i)} + \quad (3.56) \\ & - \{m_i^w - (B^{sw} + B^{iw} + \hat{B}^w) \beta_{,i}^w + B^{ws} \beta_{,i}^s + B^{wi} \beta_{,i}^i\} V_i^w + \\ & - \{m_i^i - (B^{si} + B^{wi} + \hat{B}^i) \beta_{,i}^i + B^{is} \beta_{,i}^s + B^{ii} \beta_{,i}^w\} V_i^i. \end{aligned}$$

Jäätyvän maan dissipaation oletetaan riippuvan faasinmuutoksen nopeudesta  $\theta = \theta^w = -\dot{\theta}$ , huokosjään deformaationopeudesta  $d_{ij}^i$ , huokosveden ja huokosjään massavirroista  $\rho^w \beta^w V_i^w$  ja  $\rho^i \beta^i V_i^i$  raerungon suhteen sekä lämpövuosta  $q_i$ . Huokosveden virtausta huokosjään suhteen ei oteta huomioon. Siten sekä sisäiselle että termiselle dissipaatiolle voidaan esittää dissipaatiopotentialit

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_1(\delta_1), \quad \delta_1 \in (\theta, d_{ij}^i, \rho^w \beta^w V_i^w, \rho^i \beta^i V_i^i), \\ \phi_2 &= \phi_2(\delta_2), \quad \delta_2 \in (q_i). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Vaaditaan, että dissipaatiopotentialit (3.57) ovat ei-negatiivisia ja derivoituvia konveksisia funktioita, jotka saavat origossa arvon nolla:  $\phi(\delta) = 0$ . Koska (Frémond & Nicolas 1990) voidaan kirjoittaa, että

$$0 = \phi(0) \geq \phi(\delta) + (0 - \delta) \frac{d\phi}{d\delta}(\delta), \quad (3.58)$$

saadaan dissipaatiolle lauseke

$$\mathcal{D} = \delta \frac{d\phi}{d\delta}(\delta) \geq \phi(\delta) \geq 0, \quad (3.59)$$

joka täyttää asetetun ehdon (3.45)<sub>1</sub>. Sijoittamalla kuvaukset (3.57) yhtälöön (3.59) saadaan sisäiselle ja termiselle dissipaatiolle kehittelmät

$$\bar{d}'_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \theta + \frac{\partial \phi_1}{\partial d_{ij}^i} d_{ij}^i + \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho^w \beta^w V_i^w} \rho^w \beta^w V_i^w + \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho^i \beta^i V_i^i} \rho^i \beta^i V_i^i \quad (3.60)$$

$$\bar{d}'_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial q_i} q_i .$$

Sisäisen dissipaation (3.43) täytyy toteuttaa yhtälö (3.60)<sub>1</sub> kehittämällä, joka saadaan lisäämällä sisäiseen dissipaatioon (3.43) Lagrangen kertoimilla  $\eta^s$  ja  $\eta^w$  kerrotut massan säilymislaite (3.16) siten, että

$$\bar{d}'_1 + \eta^s \theta^s + \eta^w (\theta^w + \theta^i) . \quad (3.61)$$

Todettakoon, että kehitemä (3.61) toteuttaa Clausius-Duhemin epäyhtälön (3.45)<sub>1</sub>. Kun massan säilymislaite (3.16) kirjoitetaan muotoon

$$\theta^s = \rho^s \beta^{s*(s)} + \rho^s \beta^s U_{i,i}^s \quad (3.62)$$

$$\theta^w + \theta^i = \rho^w \beta^{w*(w)} + \rho^w \beta^w U_{i,i}^w + \rho^i \beta^{i*(i)} + \rho^i \beta^i U_{i,i}^i ,$$

saadaan kehittämän (3.61) toteuttaessa yhtälö (3.60)<sub>1</sub> yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} \left( \sigma_{ij}^s - \frac{\partial \psi^s}{\partial \epsilon_{ij}^s} \right) d_{ij}^s + (-\psi^s + \eta^s \rho^s \beta^s) U_{k,k}^s &= 0 \\ \left[ - (B^{ss} + \hat{B}^s + B^{ws} + B^{is}) + \eta^s \rho^s \right] \beta^{s*(s)} &= 0 \\ \sigma_{ij}^w d_{ij}^w + \left( -\psi^w + \eta^w \rho^w \beta^w - \rho^w \beta^w \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right) U_{k,k}^w &= 0 \\ \left[ - (B^{sw} + \hat{B}^w + B^{ww} + B^{iw}) + \eta^w \rho^w - \rho^w \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right] \beta^{w*(w)} &= 0 \\ \left( \sigma_{ij}^i - \frac{\partial \psi^i}{\partial \epsilon_{ij}^i} - \frac{\partial \phi_1}{\partial d_{ij}^i} \right) d_{ij}^i + (-\psi^i + \eta^w \rho^i \beta^i) U_{k,k}^i &= 0 \\ \left[ - (B^{si} + \hat{B}^i + B^{wi} + B^{ii}) + \eta^w \rho^i \right] \beta^{i*(i)} &= 0 \\ \left\{ - [m_i^w - (B^{sw} + B^{iw} + \hat{B}^w) \beta_{,i}^w + B^{ws} \beta_{,i}^s + B^{wi} \beta_{,i}^i] - \rho^w \beta^w \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho^w \beta^w V_i^w} \right\} V_i^w &= 0 \\ \left\{ - [m_i^i - (B^{si} + B^{wi} + \hat{B}^i) \beta_{,i}^i + B^{is} \beta_{,i}^s + B^{iw} \beta_{,i}^w] - \rho^i \beta^i \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho^i \beta^i V_i^i} \right\} V_i^i &= 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

Jakamalla jännitys deviaatio-osaan ja isotrooppiseen osaan yhtälön (3.19) mukaan, käyttämällä deformaationopeudelle yhtälön (3.4) mukaista määritelmää ja eliminoimalla Lagrangen kertoimet saadaan lopulta yleiset konstitutiviset yhteydet

jännityksille:

$$\begin{aligned}
 \sigma'_{ij}{}^s &= \frac{\partial \psi^s}{\partial \epsilon_{ij}^s}, \\
 \sigma'_{ij}{}^w &= 0, \\
 \sigma'_{ij}{}^i &= \frac{\partial \psi^i}{\partial \epsilon_{ij}^i} + \frac{\partial \phi_1}{\partial d_{ij}^i}, \\
 p^s &= -\frac{1}{3} \frac{\partial \psi^s}{\partial \epsilon_{kk}^s} - \psi^s + \beta^s (B^{ss} + B^{ws} + B^{is} + \hat{B}^s), \\
 p^w &= -\psi^w + \beta^w (B^{sw} + B^{ww} + B^{iw} + \hat{B}^w), \\
 p^i &= -\frac{1}{3} \frac{\partial \psi^i}{\partial \epsilon_{kk}^i} - \frac{1}{3} \frac{\partial \phi_1}{\partial d_{kk}^i} - \psi^i + \beta^i (B^{si} + B^{wi} + B^{ii} + \hat{B}^i),
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

faasinmuutokselle:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} = -\frac{\psi^w + p^w}{\rho^w \beta^w} + \frac{\psi^i + p^i + \frac{1}{3} \frac{\partial \psi^i}{\partial \epsilon_{kk}^i} + \frac{1}{3} \frac{\partial \phi_1}{\partial d_{kk}^i}}{\rho^i \beta^i}, \tag{3.65}$$

huokosveden ja -jään virtaukselle:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho^w \beta^w V_i^w} &= -\frac{1}{\rho^w \beta^w} \left[ m_i^w - (B^{sw} + B^{iw} + \hat{B}^w) \beta_{,i}^w + B^{ws} \beta_{,i}^s + B^{wi} \beta_{,i}^i \right] \\
 \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho^i \beta^i V_i^i} &= -\frac{1}{\rho^i \beta^i} \left[ m_i^i - (B^{si} + B^{wi} + \hat{B}^i) \beta_{,i}^i + B^{is} \beta_{,i}^s + B^{iw} \beta_{,i}^w \right]
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

ja lisäksi yhtälöistä (3.44) ja (3.57)<sub>2</sub> yleinen Fourier'n lämmönjohtumisyhtälö

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial q_i} = -\frac{T_{,i}}{T}. \tag{3.67}$$

Tarkastellaan lähemmin faasinmuutosyhtälöä (3.65), joka voidaan kirjoittaa havainnollisempaan muotoon käyttämällä paineen eri osille merkintöjä

$$\begin{aligned}
 p_R^k &= -\frac{1}{3} \frac{\partial \psi^k}{\partial \epsilon_{kk}^k} \quad (\text{reversiibeli osa}), \\
 p_{IR}^k &= -\frac{1}{3} \frac{\partial \phi_1}{\partial d_{kk}^k} \quad (\text{irreversiibeli osa}), \\
 p_{TH}^k &= -\psi^k + \beta^k (B^{sk} + B^{wk} + B^{ik} + \hat{B}^k) \quad (\text{termodyn. paine}),
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

joille pätee  $p^k = p_R^k + p_{IR}^k + p_{TH}^k$ . Sijoittamalla merkinnät (3.68) yhtälöön (3.65)

saadaan lauseke

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} = - \frac{\psi^w + p_{TH}^w}{\rho^w \beta^w} + \frac{\psi^i + p_{TH}^i}{\rho^i \beta^i} = -(g^w - g^i), \quad (3.69)$$

joka "yllättäen" on huokosveden Gibbsin vapaan energian muutos tilavuutta kohti. Yhtälö (3.69) osoittaa sen, että Gibbsin vapaan energian muutos huokosveden jäätymisessä on todellakin negatiivinen ja jäätyminen tapahtuu spontaanisti.

Kirjoitetaan vielä huokosveden diffuusioyhtälö (3.66)<sub>1</sub> kehittyneempään muotoon

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho^w \beta^w V_i^w} = & - \frac{1}{\rho^w \beta^w} \left[ \beta^w \left( \frac{p^w}{\beta^w} \right)_{,i} - f_i^w - \frac{\psi^w}{\beta^w} \beta_{,i}^w + \right. \\ & \left. + B^{ww} \beta_{,i}^w + B^{ws} \beta_{,i}^s + B^{wi} \beta_{,i}^i \right]. \end{aligned} \quad (3.70)$$

### 3.3.2 Routivan maan konstitutiiviset yhteydet

Valitaan vapaiden energioiden lausekkeet

$$\begin{aligned} \psi^s &= \beta^s \left\{ -\rho^s C^s T \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + \frac{1}{2} K^s (\epsilon_{kk}^s)^2 + \mu^s \epsilon_{ij}^s \epsilon_{ij}^s \right\}, \\ \psi^w &= \rho^w \beta^w \left\{ -C^w T \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) - \frac{L(T-T_0)}{T_0} + \frac{\theta T}{T_0} f(\beta^s, \beta^w, \beta^i) \right\}, \\ \psi^i &= \beta^i \left\{ -\rho^i C^i T \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + \frac{1}{2} K^i (\epsilon_{kk}^i)^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.71)$$

ja dissipaatiopotentiaalien muodot

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2} k_\theta \theta^2 + \frac{\beta^i}{p} \lambda^{1-p} \left[ K / d_{ij}^i \right]^p + \frac{1}{2} k_w \rho^w \beta^w V_i^w \rho^w \beta^w V_i^w, \\ \phi_2 &= \frac{1}{2} k_T q_i q_i. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Jäätyvän maan vapaiden energioiden (3.47) ja dissipaatiopotentiaalien (3.57) valitsemiseksi on tehty seuraavat oletukset:

1. Raerunko käyttäytyy kimmoisesti ja sen lämpölaajenemista ei oteta huomioon.
2. Huokosjää on kimmo-visko-plastinen materiaali, jonka tilavuuden muodonmuutos tapahtuu kimmoisesti ja deviatorinen viskoplastisesti (Friaa 1979). Huokosjään suhteellinen nopeus  $V_i^i = 0$  eli huokosjäällä ja



raerungolla on sama nopeus ja muodonmuutos. Huokosjään lämpölaajenemista ei oteta huomioon.

3. Aikaisemmin (yhtälö (3.47)<sub>2</sub>) on jo oletettu, että huokosvesi käyttäytyy ideaalinesteen tavoin eli on kitkaton ja kokoonpuristumaton.

4. Huokosveden jäätyminen aiheuttaa sisäenergiaan epäjatkuvuuden, jota vastaa jäätymisessä vapautuva veden sulamislämpö eli latentti lämpö (vertaa entalpian epäjatkuvuus (2.10)<sub>2</sub>). Sulamislämmön ja ominaislämpökapasiteettien välille on olemassa yhteys

$$\ell = \tilde{e}^+ - \tilde{e}^- = (C^w - C^i)T_0 + L. \quad (3.73)$$

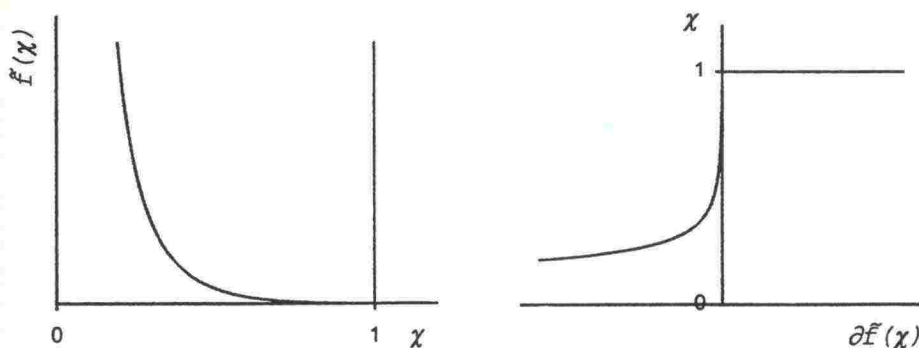
5. Huokosveden sitoutumisen vaikutus jäätymiseen otetaan huomioon konveksisella funktiolla  $f(\beta^s, \beta^w, \beta^i)$ , joka voidaan korvata huokosveden suhteellista osuutta  $\chi$  käyttäen vastaavan tyyppisellä funktiolla  $\tilde{f}(\chi)$  (Blanchard & Frémond 1982):

$$f(\beta^s, \beta^w, \beta^i) = \tilde{f}\left(\frac{\beta^w}{1-\beta^s}\right) = \tilde{f}(\chi), \quad \chi \in [0, 1], \quad (3.74)$$

jolla on fysikaalisista syistä ominaisuudet (kuva 10)

$$\begin{aligned} \tilde{f}(1) &= 0, & \text{huokosvesi on täysin sulaa} \\ \tilde{f}'(1) &= 0, & \text{subdifferenciaali } \partial \tilde{f} \text{ on jatkuva} \\ \tilde{f}''(1) &\geq 0, & \text{seuraa konveksisuudesta} \\ \tilde{f} &\rightarrow +\infty, & \text{kun } \chi \rightarrow 0, \text{ osa huokosvedestä pysyy sulana} \\ \tilde{f} &= +\infty, & \text{kun } \chi > 1, \text{ seuraa rajoitteesta } \chi \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Funktion  $\tilde{f}$  fysikaalista merkitystä voidaan selvittää ajattelemalla, että huokosveden vapaan energian (3.71)<sub>2</sub> termi  $\rho^w(\ell T/T_0)f(\beta^s, \beta^w, \beta^i)$  kuva energiaa, joka vaaditaan huokosveden ja mineraalipartikkelien välisen sitoutumisen purkamiseksi.



Kuva 10: Funktio  $\tilde{f}(\chi)$  ja sen subdifferenciaali  $\partial \tilde{f}(\chi)$ .

Sijoittamalla valitut vapaiden energioiden ja dissipaatiopotentiaalien lausekkeet (3.74) ja (3.75) yleisiin konstitutiivisiin yhteyksiin (3.64)...(3.67) saadaan erityiset jäätyvän maan konstitutiiviset yhtälöt

**jännityksille:**

$$\sigma'_{ij}{}^s = \beta^s \mu^s \varepsilon'_{ij}{}^s, \quad \sigma'_{ij}{}^w = 0, \quad \sigma'_{ij}{}^i = \beta^i \lambda^{1-p} K^p |d'_{ij}{}^i|^{p-2} d'_{ij}{}^i,$$

$$p^s = \beta^s \left\{ -K^s \varepsilon'_{kk}{}^s + \rho^w \beta^w \frac{\ell T}{T_0} \frac{\partial f}{\partial \beta^s} + \hat{B}^s \right\}, \quad (3.76)$$

$$p^w = \beta^w \left\{ \rho^w \beta^w \frac{\ell T}{T_0} \frac{\partial f}{\partial \beta^w} + \hat{B}^w \right\},$$

$$p^i = \beta^i \left\{ -K^i \varepsilon'_{kk}{}^i + \rho^w \beta^w \frac{\ell T}{T_0} \frac{\partial f}{\partial \beta^i} + \hat{B}^i \right\},$$

missä  $\hat{B}^s = \hat{B}^w = \hat{B}$  jäätyneessä maassa ja  $\hat{B}^s = \hat{B}^w \geq \hat{B}$  sulassa maassa;

**faasinmuutokselle:**

$$k_\theta \theta = -(C^w - C^i) T \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) - \frac{L(T - T_0)}{T_0} + \frac{\ell T}{T_0} \left[ \frac{\partial(\beta^w f)}{\partial \beta^w} - \frac{\rho^w}{\rho^i} \frac{\partial(\beta^w f)}{\partial \beta^i} \right] + \frac{\hat{B}^w}{\rho^w} - \frac{\hat{B}^i}{\rho^i} - \frac{K^i (\varepsilon'_{kk}{}^i)^2}{2\rho^i}, \quad (3.77)$$

missä kerroin  $k_\theta \geq 0$  kuvaa dissipaation määrää;

**huokosveden virtaukselle:**

$$k_w \rho^w \beta^w V_i^w = -\frac{1}{\rho^w} \left( \frac{p^w}{\beta^w} \right)_{,i} + \frac{1}{\rho^w \beta^w} f_{i,w} - \frac{\ell T}{T_0} f_{,i}, \quad (3.78)$$

mitä voidaan pitää jäätyvän maan Darcyn yhtälönä, jossa kerroin  $k_w \geq 0$  liittyy vedenläpäisevyyteen  $k$  siten, että  $k_w = g/k\rho^w$ ;

**lämmönjohtumiselle:**

$$q_i^k = -\kappa^k \beta^k T_{,i}, \quad k \in \{s, w, i\}. \quad (3.79)$$

missä kertoimen  $k_T \geq 0$  ja lämmönjohtavuuden  $\kappa^k$  välillä on yhteys siten, että  $\kappa^k = 1/k_T T$ . Kokonaislämpövuovektori määritetään analogisesti kokonaisjännitysten kanssa:  $q_i = q_i^s + q_i^w + q_i^i$ .

### 3.3.3 Jäätyvän maan Clausius-Clapeyronin yhtälö

Mikkola (Frémond & Mikkola 1991) on todennut, että faasinmuutoksen dissipaatio on verrattain heikko. Tällöin ensimmäisenä approksimaationa voidaan olettaa, että  $k_\theta = 0$ . Siten yhtälön (3.69) differentioiminen muuttujien  $(T, p^k, \beta^k)$

suhteen antaa yhtälöiden (3.71)<sub>2</sub> ja (3.71)<sub>3</sub> sijoitusten jälkeen lausekkeen

$$\frac{1}{\rho^w} d\left(\frac{P_{TH}^w}{\beta^w}\right) - \frac{1}{\rho^i} d\left(\frac{P_{TH}^i}{\beta^i}\right) = \left[ (1-f) \frac{\ell}{T_0} + (C^w - C^i) \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \right] dT, \quad (3.80)$$

jota voidaan pitää Clausius-Clapeyronin yhtälön approksimaationa jäätyvälle maalle.

### 3.4 Yhteenveto

Edellä suoritettiin maan routimisen matemaattinen mallintaminen. Sen tuloksena syntyi termomekaaninen malli, jonka kenttäyhtälöt ovat massan säilymislaite (3.16), liikemäärän taseen periaate (3.23) ja energian taseen periaate (3.32) ja jonka konsitutiiviset yhtälöt ovat (3.64), (3.65), (3.66) ja (3.67) sekä lisäksi rajoite-ehto (3.2). Yhtälöitä on kaikkiaan 35 kappaletta. Vastaavasti tuntemattomia ovat tilavuusosat  $\beta^k$ , nopeudet  $U_i^k$ , lämpötila  $T$ , jännitystensorit  $\sigma_{ij}^k$ , lämpövuovektori  $q_i$  ja subgradienttien komponentit  $\hat{B}^s = \hat{B}^w = \hat{B}^i$ . Tuntemattomia on myös 35 kappaletta, joten tässä suhteessa asetelma on oikea. Edelleen tuntemattomat tulee määrittää riippumattomien muuttujien  $x_j$  ja  $t$  funktioina. Riippuvia muuttujia ovat tuntemattomien muuttujien lisäksi annetut muuttujat, jotka ovat materiaaleille ominaisia aineparametrejä ja funktiomuotoja. Ne annetaan valitsemalla sopivat vapaiden energioiden (3.71) ja dissipaatiopotentialien (3.72) lausekkeet ja siten tulevat näkymään konstitutiivisissa yhteyksissä (3.76)...(3.79).



## 4 ROUTIMISTEHTÄVÄ

Edellä esitetty routivan maan termomekaaninen malli on varsin monimutkainen systeemi, jossa terminen, hydraulinen ja mekaaninen ongelma kytkeytyvät toisiinsa. Käytännössä kaikkia tuntemattomia ei yritetä ratkaista yhtä aikaa, vaan sopivasti yhtälöitä yhdistelemällä voidaan osa tuntemattomista eliminoida ja saadaan alkuperäistä pienempi ja mahdollisesti yksinkertaisempi yhtälösystemi, jossa samanaikaisesti esiintyviä tuntemattomia nimitetään systeemin perustuntemattomiksi. Jäätävän maan mekaniikka on eräänlainen kiinteän aineen mekaniikan ja nestemekanikan välimuoto liittyen läheisesti maamekaniikkaan. Siten perustuntemattomat pyritään valitsemaan ja routimistehtävä muodostamaan käyttäen maamekaniikassa tunnettuja suureita ja periaatteita ja kiinnittäen huomiota mahdollisimman hyvään havainnollisuuteen ja selkeyteen, välttämällä kuitenkin liiallista yksinkertaistusta.

Valitaan routimistehtävän perustuntemattomiksi huokoisuus  $n$ , huokosveden suhteellinen osuus  $\chi$ , lämpötila  $T$ , huokosveden paine  $p^w/\beta^w$ , virtausnopeus  $\beta^w V_i^w$  ja raerungon siirtymä  $u_p$ , yhteensä 10 kappaletta. Routimistehtävän yhtälösystemi formuloidaan massan säilymislaista (3.16), liikemäärän taseen periaatteesta (3.23), energian taseen periaatteesta (3.32) sekä konstitutiivisista yhtälöistä (3.76)...(3.79). Yhtälösystemin yhtälöiden lukumäärän tulee olla perustuntemattomien suuruinen ja kunkin yhtälön perustuntemattomista yhtä voidaan pitää yhtälön päätuntemattomana.

Seuraavassa esitetään routimistehtävän yhtälöiden formulointi lausumalla ensiksi komponenttien tilavuusosat huokoisuuden ja huokosveden suhteellisen osuuden avulla.

Jäätäneen maan huokoisuus on huokosveden ja huokosjään tilavuusosien summa:

$$n = \beta^w + \beta^i . \quad (4.1)$$

Jäätäneen maan huokosveden suhteellinen osuus määritetään sulan veden ja kokonaisvesimäärän suhteena:

$$\chi = \frac{\beta^w}{1 - \beta^s} , \quad (4.2)$$

tai myös

$$\chi = \frac{1 - \beta^s - \beta^i}{1 - \beta^s} . \quad (4.3)$$

Tällöin rajoite-ehdosta (3.2) seuraa raerungon, huokosveden ja huokosjään tilavuusosille lausekkeet



$$\begin{aligned}
\beta^s &= 1 - n, \\
\beta^w &= \chi n, \\
\beta^i &= (1 - \chi) n.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

#### 4.1 Huokosveden suhteellinen osuus

Faasinmuutosyhtälö (3.77) määrittää jäätyvässä maassa komponenttien tilavuusosien, lämpötilan ja paineen välisen suhteen. Kun funktio  $f(\beta^s, \beta^w, \beta^i)$  korvataan yhtälön (3.74) mukaisesti funktiolla  $\tilde{f}(\chi)$ , saadaan lauseke huokosveden suhteelliselle osuudelle  $\chi$ . Ehdot (3.75) toteuttava yksinkertainen polynomifunktio on muotoa

$$\tilde{f}(\chi) = a \frac{(1 - \chi)^2}{\chi^2}. \tag{4.5}$$

Parametri  $a$  määräytyy mineraalipartikkelien elektronegatiivisuuden ja ominaispinta-alan mukaan. Se on sitä suurempi mitä elektronegatiivisempia mineraalipartikkelit ovat ja mitä suurempi niiden ominaispinta-ala on eli käytännössä mitä suurempi osa huokosvedestä pysyy sulana.

Funktion  $\tilde{f}(\chi)$  avulla sekä olettaen dissipaation heikoksi ( $k_0=0$ ) ja jään tilavuudenmuodonmuutosenergian pieneksi voidaan yhtälö (3.77) kirjoittaa muotoon

$$\frac{\partial(\chi \tilde{f})}{\partial \chi} = \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + \frac{L}{\ell} \left[ \frac{T - T_0}{T} - \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \right] + \left( \frac{1}{\rho^i} - \frac{1}{\rho^w} \right) \hat{B} \left( \frac{\ell T}{T_0} \right)^{-1}, \tag{4.6}$$

jossa huokospaineen termi  $\hat{B} = \hat{B}^w = \hat{B}^i$ . Yhtälön (4.6) oikean puolen toisen termin merkitys on käytännössä vähäinen, joten se voidaan jättää pois. Siten sijoittamalla yhtälöön (4.6) funktion  $\tilde{f}$  lauseke (4.5) saadaan huokosveden suhteelliselle osuudelle yhtälö

$$\chi = \left\{ 1 - \frac{1}{a} \left[ \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + \left( \frac{1}{\rho^i} - \frac{1}{\rho^w} \right) \hat{B} \left( \frac{\ell T}{T_0} \right)^{-1} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.7}$$

Funktion  $\tilde{f}(\chi)$  ominaisuuksien perusteella voidaan päätellä, että yhtälön (4.6) oikea puoli voi saada ainoastaan ei-positiivisia arvoja. Siten saadaan ehto

$$\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + \left( \frac{1}{\rho^i} - \frac{1}{\rho^w} \right) \hat{B} \left( \frac{\ell T}{T_0} \right)^{-1} \leq 0, \tag{4.8}$$

jonka täytyy olla voimassa maan jäätymisprosessin aikana. Ottamalla huomioon logaritmin sarjakehitelmän ensimmäinen termi se voidaan edelleen kirjoittaa muotoon

$$\ell \frac{T - T_0}{T_0} \frac{T}{T_0} \leq - \left( \frac{1}{\rho^i} - \frac{1}{\rho^w} \right) \hat{B} . \quad (4.9)$$

Yhtälöstä (4.9) nähdään paineen vaikutus jäätymislämpötilaan. Kun  $\hat{B} > 0$ , huokosveden jäätymislämpötila laskee, mikä on todettu myös kokeellisesti (Williams 1991). Mutta jos  $\hat{B} < 0$ , tarkoittaisi se sitä, että huokosvesi alkaisi jäätymä normaalin jäätymispisteen yläpuolella. Tällaisen ilmiön merkitys on kuitenkin vähäinen maan jäätymisessä.

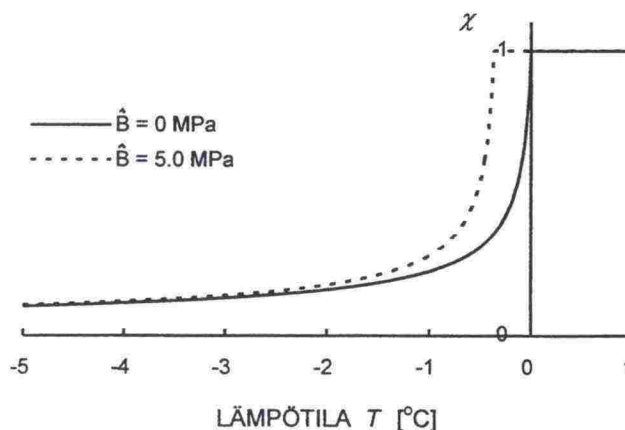
Huokosveden suhteellisen osuuden funktio voidaan kirjoittaa täydellisempään muotoon ottamalla huomioon funktion  $\tilde{f}(\chi)$  subdifferentiaalin ominaisuudet. Siten käyttämällä merkintää

$$D = \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + \left( \frac{1}{\rho^i} - \frac{1}{\rho^w} \right) \hat{B} \left( \frac{\ell T}{T_0} \right)^{-1} \quad (4.10)$$

saadaan huokosveden suhteelliselle osuudelle määritelmä

$$\chi = \begin{cases} \left\{ 1 - \frac{1}{a} \left[ \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + \left( \frac{1}{\rho^i} - \frac{1}{\rho^w} \right) \hat{B} \left( \frac{\ell T}{T_0} \right)^{-1} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} , & \text{kun } D \leq 0 \\ 1 , & \text{kun } D > 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

joka on esitetty graafisesti kuvassa 13.



Kuva 13: Huokosveden suhteellinen osuus lämpötilan funktiona eri huokospaineen  $B$  arvoilla.

Williams (1991) on todennut, että huokosveden jäätymisen ja sulamisen välillä vallitsee huokoisen materiaalin kostumisesta ja kuivumisesta tuttu hystereesi-ilmiö. Ilmiö selittyy sillä, että prosessi on osittain irreversiibeli. Täten yhtälö (4.7) on tarkasti ottaen voimassa vain silloin, kun maa jäähtyy.

## 4.2 Huokosveden virtausnopeus

Maamekaniikassa huokosveden nopeus määritetään keskimääräisenä virtausnopeutena käyttäen Darcyn lakia. Sen vastine jäätyvälle maalle on yhtälö (3.78), joka veden johtavuuden avulla esitettyä kuuluu

$$\beta^w V_i^w = -\frac{k}{\rho^w g} \left[ \left( \frac{p^w}{\beta^w} \right)_{,i} - \rho^w g_i + \rho^w \frac{\ell T}{T_0} \tilde{f}_{,i} \right]. \quad (4.12)$$

Yhtälössä (4.12) huokosveden paine sisältää virtauksen käynnistävän imuvoiman, kun taas yhtälön oikean puolen viimeinen termi kuvaa jäätyksen aiheuttamaa virtausta vastustavaa voimaa. Siten yhtälö (4.12) ottaa huomioon automaattisesti jäätyvän maan veden läpäisevyyden pienenemisen, ja veden johtavuus  $k$  pysyy muuttumattomana jäätyksen suhteen.

## 4.3 Huokoisuuden jatkuvuusyhtälö

Yhtälön (4.4)<sub>1</sub> sijoitus raerungon massa säilymlakiin (3.16)<sub>1</sub> antaa lausekkeen

$$-n_{,0} + \left[ (1 - n) U_i^s \right]_{,i} = 0, \quad (4.13)$$

josta eliminoidaan raerungon nopeus käyttämällä nopeuden ja siirtymän välistä tunnettua yhteyttä  $U_i = u_{i,0}$ . Siten saadaan huokoisuuden jatkuvuusyhtälö

$$-n_{,0} + \left[ (1 - n) u_{i,0} \right]_{,i} = 0. \quad (4.14)$$

## 4.4 Huokosveden jatkuvuusyhtälö

Kehitetään ensiksi huokosveden ja huokosjään massan säilymisen yhtälöä (3.16)<sub>2</sub> sijoittamalla siihen suhteelliset nopeudet (3.3). Siten järjestelemällä termejä saadaan jatkuvuusyhtälö muotoon

$$\begin{aligned} & (\beta^w V_i^w)_{,i} + \frac{\rho^i}{\rho^w} (\beta^i V_i^i)_{,i} + \\ & + (\beta^w + \frac{\rho^i}{\rho^w} \beta^i)_{,0} + \left[ (\beta^w + \frac{\rho^i}{\rho^w} \beta^i) U_i^s \right]_{,i} = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Yhtälöä (4.15) voidaan edelleen kehittää käyttämällä raerungon massan säilymisen yhtälöä (3.16)<sub>1</sub> ja tietoa, että  $V_i^i = 0$ . Siten voidaan kirjoittaa lauseke

$$(\beta^w V_i^w)_{,i} + \left[ \chi + \left( 1 - \frac{\rho^i}{\rho^w} \right) \chi \right] U_{i,i}^s + \left( 1 - \frac{\rho^i}{\rho^w} \right) n (\chi_{,0} + \chi_{,i} U_i^s) = 0. \quad (4.16)$$



Kun otetaan huomioon virtausnopeuden konstitutiivinen yhtälö (4.12), päädytään lopulta huokosveden jatkuvuusyhtälöön

$$\left[ \frac{k}{\rho^w g} \left( \frac{p^w}{\beta^w} \right)_{,i} \right]_{,i} + \left[ \frac{k}{\rho^w g} \left( \rho^w \frac{\ell T}{T_0} \bar{f}_{,i} - \rho^w g_i \right) \right]_{,i} +$$

$$- \left[ \chi + (1 - \chi) \frac{\rho^i}{\rho^w} \right] u_{i,i0} - \left( 1 - \frac{\rho^i}{\rho^w} \right) n (\chi_{,0} + \chi_{,i} u_{i,0}) = 0 , \quad (4.17)$$

jossa huokospaine  $p^w/\beta^w$  esiintyy päätuntemattomana.

#### 4.5 Jäätynneen maan tasapainoyhtälö

Jäätynneen maan liikeyhtälö (3.23) pelkistyy tasapainoyhtälöksi, koska hitaustermejä ei oteta huomioon. Siten yhtälöistä (3.22) ja (3.23) seuraa lauseke

$$\sum_k (\sigma_{ij,j}^k + f_i^k) = 0 . \quad (4.18)$$

Maamekaniikassa jännitykset esitetään yleensä "Terzaghin hajoitelmana", joka voidaan muodostaa myös jäätynneen maan tapauksessa:

$$\sigma_{ij}^k = \sigma_{ij}^{*k} - p_{TH}^k \delta_{ij} . \quad (4.19)$$

Jännitystä  $\sigma_{ij}^*$  nimitetään tehokkaaksi jännitykseksi. Hajoitelma (4.19) perustuu Terzaghin tehokkaan jännityksen periaatteeseen, jonka mukaan muodonmuutokset riippuvat vain tehokkaasta jännityksestä eivätkä kokonaisjännityksestä. Tehokas jännitys kuvaa keskimääräisessä mielessä maarakkeiden välityksellä siirtyviä kosketusvoimia. Hajoitelman (4.19) sijoitus tasapainoyhtälöön (4.18) antaa lausekkeen

$$(\sigma_{ij}^{*s} + \sigma_{ij}^{*i})_{,j} - \sum_k [(p_{TH}^k)_{,i} - f_i^k] = 0 , \quad (4.20)$$

jota voidaan nimittää jäätynneen maan tasapainoyhtälöksi. Yhtälöä (4.20) tarkastelemalla havaitaan, että termodynaamisen paineen miinusmerkkinen gradientti on tehokkaiden jännitysten kannalta eräänlainen lisäkuormitustermi. Termodynaaminen paine on jäätynneessä maassa vallitseva kokonaispaine sisältäen huokosveteen kohdistuvan imun sekä raerunkoon kohdistuvan, huokosia laajentavan ns. routapaineen.

Saatetaan yhtälö (4.20) vielä sellaiseen muotoon, jossa tuntemattomina suureina on ainoastaan valittuja perustuntemattomia. Yhtälöä (4.20) täten täydennetään konstitutiivisilla yhteyksillä, jotka saadaan tehokkaille jännityksille ja termodynaamiselle paineelle soveltamalla hajoitelmaa (4.19) yhtälöihin (3.76) sekä kappalevoimille käyttämällä yhtälöä (3.17). Siten voidaan kirjoittaa



tehokkaille jännityksille:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{*s} &= (1-n) 2G^s u_{(j,i)} + (1-n) \left(K^s - \frac{2}{3}G^s\right) u_{k,k} \delta_{ij}, \\ \sigma_{ij}^{*i} &= (1-n) \chi \lambda^{1-p} K^p |d_{ij}^i|^{p-2} d_{ij}^i + (1-n) \chi K^i u_{k,k} \delta_{ij},\end{aligned}\quad (4.21)$$

termodynaamiselle paineelle:

$$\sum_k p_{TH}^k = \frac{p^w}{\beta^w} - \rho^w \frac{\ell T}{T_0} (1-\chi) \chi \frac{\partial \bar{f}}{\partial \chi} \quad (4.22)$$

ja kappalevoimille:

$$\sum_k f_i^k = [\rho^s (1-n) + \rho^w \chi n + \rho^i (1-\chi) n] g_i. \quad (4.23)$$

Yhtälön (4.21) ainevakiot eivät ole yksittäisten maarakeiden tai kiinteän jään ainevakioita vaan raerungon ja huokosjään keskimääräisiä arvoja, sillä raerungon rakeet voivat liukua toistensa suhteen sekä raerungon ja huokosjään välissä on lähes aina huokosvettä heikentäen tartuntaa. Huokosjäättä voidaan pitää eräänlaisena raerunkoa jäykistävänä materiaalina. Sijoittamalla konstitutiiviset yhteydet (4.21)–(4.23) saadaan tasapainoyhtälölle (4.20) lopuksi muoto

$$\begin{aligned}& \left\{ (1-n) \chi \lambda^{1-p} K^p |d_{ij}^i|^{p-2} d_{ij}^i + (1-n) 2G^s u_{(j,i)} + \right. \\ & \left. + [(1-n) \left(K^s - \frac{2}{3}G^s\right) + (1-n) \chi K^i] u_{k,k} \delta_{ij} \right\}_{,j} + \\ & - \left[ \frac{p^w}{\beta^w} - \rho^w \frac{\ell T}{T_0} (1-\chi) \chi \frac{\partial \bar{f}}{\partial \chi} \right]_{,i} + \\ & + [\rho^s (1-n) + \rho^w \chi n + \rho^i (1-\chi) n] g_i = 0,\end{aligned}\quad (4.24)$$

jossa päätuntemattomana on raerungon siirtymä.

## 4.6 Energiayhtälö

Energian taseen periaate (3.32) koostuu sisäenergian muutoksesta, sisäisten ja ulkoisten voimien tehosta sekä lämpötehosta. Sisäenergia puolestaan sisältää muodonmuutosenergian ja kalorisen energian osan. Lämpötilan ja siirtymien välillä on täten kytkentä. Kuitenkin maan jäätyessä muutokset raerungossa ja huokosjäässä tapahtuvat niin hitaasti, että kytkennän voidaan olettaa häviävän ja venymänopeudet sisältävät termit voidaan jättää pois (Malvern 1969). Lisäksi komponenttien nopeudet ovat niin pieniä, että sisäisten ja ulkoisten voimien tehojen osuus on pieni muiden energiatermien

rinnalla. Siten energian taseen periaate (3.32) voidaan yksinkertaistaa muotoon

$$\sum_k \left\{ e^{k \cdot (k)} + e^{k U_{i,i}^k + q_{i,i}^k - r^k} \right\} = 0, \quad (4.25)$$

jossa sisäenergia

$$e^k = e^k(T, n, \chi). \quad (4.26)$$

Sisäenergiat saadaan vapaiden energioiden lausekkeista (3.71) soveltamalla yhtälöitä (3.40) ja (3.55). Kun lisäksi käytetään lämpövuolle konstitutiivista yhteyttä (3.79) ja sulamislämmölle määritelmää (3.73), voidaan yhtälö (4.25) saattaa suhteellisten nopeuksien (3.3) ja massan säilymislakien (3.16) avulla muotoon

$$\begin{aligned} C T_{,0} - (\kappa T_{,i})_{,i} + [C U_i^s + \rho^w C^w (\beta^w V_i^w)] T_{,i} + \\ + \left( \frac{\ell T}{T_0} + L \frac{T_0 - T}{T_0} \right) \theta^w = 0, \end{aligned} \quad (4.27)$$

jossa kokonaislämpökapasiteetti ja -lämmönjohtavuus

$$\begin{aligned} C &= (1-n) \rho^s C^s + \chi n \rho^w C^w + (1-\chi) n \rho^i C^i \\ \kappa &= (1-n) \kappa^s + \chi n \kappa^w + (1-\chi) n \kappa^i. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Yhtälössä (4.27) faasinmuutostermien jälkimmäinen osa on pieni verrattuna edelliseen, kun lämpötila poikkeaa vähän normaalista jäätymispisteestä  $T_0$ . Lisäksi raerungon nopeuden sisältävä konvektiotermi voidaan olettaa pieneksi huokosveden konvektiotermien rinnalla. Toteuttamalla nämä likimääräistyksiset saadaan energiayhtälö

$$C T_{,0} - (\kappa T_{,i})_{,i} + \rho^w C^w (\beta^w V_i^w) T_{,i} + \rho^w \frac{\ell T}{T_0} \theta^w = 0, \quad (4.29)$$

joka on eräänlainen modifioitu konvektio-diffuusioyhtälö. Faasinmuutostermi vaatii vielä joitakin lisäselvityksiä. Huokosveden massan tuotto  $\theta^w$  voidaan kirjoittaa huokosveden virtausnopeuden ja huokoisuuden jatkuvuusyhtälön (4.13) avulla muotoon

$$\theta^w \approx \theta = \rho^w [n \chi_{,0} + (\beta^w V_i^w)_{,i}], \quad (4.30)$$

josta termi  $n U_i^s \chi_{,i}$  on pudotettu pois. Epästationäärisyyssysteemin vaikutus on verrattavissa yhtälön (4.29) termiin siten, että  $\chi_{,0} \approx (\partial \chi / \partial T) T_{,0}$ . Konvektiotermi puolestaan kuljettaa jäätymisessä vapautuvaa lämpöä. Faasinmuutostermi täten hidastaa maan jäähtymistä, ja se otetaan huomioon vain silloin, kun huokosveden jäätymistä tapahtuu.

#### 4.7 Jäätävän maan Terzaghin yhtälö

Huokosveden jatkuvuusyhtälössä (4.17) on kytkentä huokosveden paineen ja siirtymän välillä. Kytkentä yritetään poistaa tekemällä yksinkertaistavia oletuksia menettelemällä seuraavasti.

Käyttämällä konstitutiivisia yhteyksiä (3.76) ja muodonmuutos-siirtymäyhtälöä (3.5) voidaan jäätävän maan isotrooppiselle jännitykselle kirjoittaa konstitutiivinen yhteys

$$p = -[(1-n)K^s + (1-n)\chi K^i]u_{k,k} + \sum_k p_{TH}^k, \quad (4.31)$$

joka siten koostuu raerungon ja huokosjään tehokkaiden jännitysten isotroopi-  
sista osista ja termodynaamisesta paineesta. Yhtälön (4.31) derivointi ajan  
suhteen ja termien uudelleenjärjestely antaa lausekkeen

$$u_{k,k0} = \frac{1}{K} \left[ \sum_k (p_{TH}^k)_{,0} - p_{,0} \right], \quad (4.32)$$

jossa tilavuudenmuutuskertoimen

$$K = (1-n)K^s + (1-n)\chi K^i. \quad (4.33)$$

käänteislukua  $1/K$  voidaan pitää jäätynneen maan kokoonpuristuvuutena.

Sijoitetaan termodynaamisen paineen konstitutiivinen yhteys (4.22) yhtälöön (4.32) ja eliminoidaan näin saadulla lausekkeella huokosveden jatkuvuusyhtälön (4.17) siirtymätermistä toinen jättäen vähemmän merkitsevä pois. Näin saadaan eliminoiduksi siirtymät:

$$\left[ \frac{k}{\rho^w g} \left( \frac{p^w}{\beta^w} \right)_{,i} \right]_{,i} - \kappa_e \left( \frac{p^w}{\beta^w} \right)_{,0} + S = 0, \quad (4.34)$$

$$S = \left[ \frac{k}{\rho^w g} \left( \rho^w \frac{\theta T}{T_0} \tilde{f}_{,i} - \rho^w g_i \right) \right]_{,i} + \kappa_e \left[ \rho^w \frac{\theta T}{T_0} (1-\chi) \chi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \chi} \right]_{,0} + \\ - \left( 1 - \frac{\rho^i}{\rho^w} \right) n \chi_{,0} + \kappa_e p_{,0}, \quad (4.35)$$

$$\kappa_e = \frac{1}{K} \left[ \chi + (1-\chi) \frac{\rho^i}{\rho^w} \right]. \quad (4.36)$$

Tätä yhtälöä voidaan pitää yhtälön (4.17) tarkennuksena, sillä raerungon ja huokosjään muodonmuutosten vaikutus on pyritty ottamaan huomioon jollain tarkkuudella. Sulan maan tapauksessa yhtälö (4.34) yksinkertaistuu Terzaghin konsolidaatioyhtälöksi.



## 4.8 Reuna-, alku- ja jatkuvuusehdot

Tähän astisessa tarkastelussa on käytetty nimityksiä kontinuumikappale, seoskontinuumi ja systeemi konkretisoimalla niitä sen tarkemmin. Käytännön tehtävissä kuitenkin törmätään ongelmaan, kuinka tarkasteltava systeemi erotetaan ympäröivästä maailmasta. Sopivan systeemin valintaa vaikeuttavat routimisilmiön monimutkaisuus ja usein selvien rajapintojen puuttuminen. Seuraavassa yritetään selvittää systeemin valintaan liittyviä ongelmia.

Systeemi on erotettava ympäristöstään siten, että systeemin ja ympäristön välinen vuorovaikutus systeemin rajapinnan läpi voidaan arvioida mahdollisimman realistisesti. Tämä vuorovaikutus ilmaistaan ns. reunaehtojen avulla. Lisäksi on tiedettävä systeemin tila hetkellä, jona routimisilmiötä aletaan tarkastella. Tieto systeemin tilasta annetaan ns. alkuehdoilla. Matemaattisessa mielessä reunaehdot ja alkuehdot liittyvät osittaisdifferentiaaliyhtälöihin, jotka routimistehtävän tapauksessa ovat huokoisuuden jatkuvuusyhtälö (4.14), huokosveden jatkuvuusyhtälö (4.17) ja (4.34), jäätyvän maan tasapainoyhtälö (4.24) ja energiayhtälö (4.29).

Maan jäätyessä voi systeemin sisälle syntyä ns. epäjatkuvuuspintoja, joiden läpi siirryttäessä voi vallitsevien suureiden tai niiden derivaattojen arvot saada hyppäyksiä, mikä voi ilmetä esimerkiksi elementtimenetelmän ratkaisun epästabiiliutena. Epäjatkuvuudet otetaan huomioon ns. jatkuvuusehtojen avulla. Mahdollisia epäjatkuvuuspintoja voi syntyä esimerkiksi routarajalle, raerunon repeämiin tai kohtiin, joissa aineominaisuudet muuttuvat.

### 4.8.1 Termiset reunaehdot

Termiset reunaehdot voidaan antaa seuraavan tyyppisinä:

$$\begin{aligned} T(x_j, t) &= \bar{T}(x_j, t), & \text{Dirichlet} \\ -\kappa(x_j, T) \frac{\partial T}{\partial v} &= \bar{q}(x_j, t), & \text{Neumann} \\ \alpha T + \beta \frac{\partial T}{\partial v} &= h, & \text{Cauchy, Robin, mixed.} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Ehdoista (4.37) nähdään, että Dirichlet'n ehto ja Neumannin ehto saadaan Cauchyn ehdon erikoistapauksina. Dirichlet'n ehtona voidaan antaa maanpinnalla lämpötilajakautuma, joka noudattaa esimerkiksi vuorokauden keskimääräistä lämpötilaa. Kun tarkasteltavan maakontinuumin alareuna ulottuu riittävän syvälle, pysyy sen lämpötila lähes muuttumattomana, jolloin Dirichlet-tyyppisenä reunaehtona voidaan antaa vakio­lämpötila. Neumann-tyyppisenä reunaehtona puolestaan annetaan lämpövirran tiheys. Jos valitaan lämpöeristetty eli adiabaattinen reuna, ehdon (4.37)<sub>2</sub> oikea puoli häviää ja päädytään homogeeniseen Neumannin ehtoon. Cauchy-tyyppinen ehto voitaisiin antaa



tilanteessa, jossa systeemin sisällä lämpö siirtyy johtumalla Fourier'n lain mukaan ja ulkopinnalta ympäristöön konvektiivisesti. Tällöin saadaan konstitutiivinen yhteys

$$-\kappa(x_j, T) \frac{\partial T}{\partial \nu} = h_c (T - T_e) \quad (4.38)$$

Todettakoon, että reunan samassa pisteessä voidaan antaa vain joko lämpötila tai lämpövirran tiheys, ei siis molempia samanaikaisesti.

#### 4.8.2 Mekaaniset reunaehdot

Tasapainoyhtälön (4.24) ratkaisemiseksi annetaan maakontinuumin reunalla joko siirtymä

$$u_i(x_i, t) = \bar{u}_i(x_i, t) \quad (4.39)$$

tai traktio

$$\sigma_{ij}(x_i, t) v_j = \bar{\sigma}_i(x_i, t) . \quad (4.40)$$

Huomattakoon, että traktio liittyy nyt kokonaisjännitykseen. Siirtymäreunaehdon tavallisin tapaus on se, jossa reunan siirtymät häviävät. Esimerkiksi maakontinuumin reuna rajoittuu kalliioon tai ulottuu syvälle maaperään, jossa vallitsee vakiojännitystila. Traktioreunaehtona puolestaan annetaan esimerkiksi ulkoinen kuormitus maanpinnalla.

Huokosveden jatkuvuusyhtälön (4.17) ratkaisemiseksi annetaan maakontinuumin reunalla joko huokosveden paine

$$\frac{p^w}{\beta^w}(x_j, t) = \bar{p}(x_j, t) \quad (4.41)$$

tai virtaustiheys

$$\beta^w v_i^w(x_j, t) v_i = \bar{v}(x_j, t) . \quad (4.42)$$

Virtausyhtälön ratkaisemiseksi edullisinta olisi valita ratkaisualue siten, että aluetta ympäröi joko huomattavasti läpäisevämpi tai läpäisemättömämpi maakerros. Jos ratkaisualue rajoittuu selvästi läpäisevämpään maakerrokseen, voidaan ajatella, että maakerros on eräänlainen vesivarasto, jossa vallitsee hydrostaattinen paine. Tällöin reunaehtona voidaan antaa huokosveden paine. Jos taas reuna on läpäisemätön, virtaustiheys häviää. Jäätyneen maan pinta voidaan olettaa läpäisemättömäksi.

### 4.8.3 Alkuehdot

Mikäli mahdollista valitaan tarkastelun kohteeksi täysin konsolidoitunut ja jäätymätön maakontinuumi. Tällöin siirtymiä ja huokosveden virtausta ei vielä esiinny ja maakontinuumin lämpötilan ja huokoisuuden jakautuminen tunnetaan. Siten voidaan esittää alkuehdot

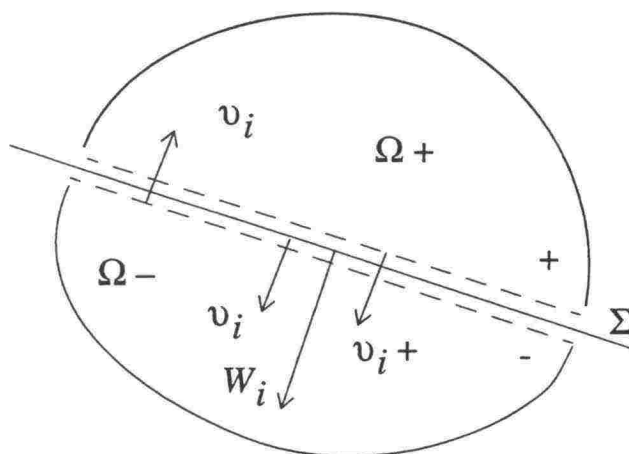
$$\begin{aligned} T(x_j, 0) &= \bar{T}(x_j) > T_0 \\ \frac{p^w}{\beta^w}(x_j, 0) &= \bar{p}(x_j) \\ u_i(x_j, 0) &= 0 \\ n(x_j, 0) &= \bar{n}(x_j) . \end{aligned} \quad (4.43)$$

Alkutila on täten referenssitila, jonka suhteen muutoksia aletaan mitata. Todettattakoon, että maakontinuumin oma paino ja mahdollinen pintakuormitus aiheuttavat alkujännitystilän, joka otetaan huomioon lisäämällä alkujännitys tehokkaan jännityksen yhtälöön (4.21). Alkuehtojen on lisäksi toteutettava systeemin reunoilla vallitsevat reunaehdot.

### 4.8.4 Jatkuvuusehdot

Säilymlakeja johdettaessa otaksuttiin esiintyvillä suureilla olevan sellainen jatkuvuus, että Gaussin lauseen soveltaminen sen tavanomaisessa muodossa (3.10) on mahdollista. Siten vallitsevat yhtälöt eivät salli epäjatkuvuuspintojen kuten jäälinsien syntymistä. Myös routarajalla jatkuvuuksien tulee toteutua, minkä osoittamiseksi johdetaan tarvittavat jatkuvuusehdot.

Olkoon systeemin sisällä epäjatkuvuuspinta  $\Sigma$ , joka liikkuu nopeudella  $W$ , pinnan normaalin  $v_i$  suuntaisesti (kuva 12).



Kuva 12: Epäjatkuvuuspinta.

Pinnalla ilmenevät epäjatkuvuudet otetaan huomioon lisäämällä ns. hyppy-ehto Gaussin lauseeseen (3.10), joka siten saa yleisemmän muodon

$$\int_{\Omega} t_{kl\dots n,j} d\Omega = \int_{\partial\Omega} t_{kl\dots n} v_j d\Gamma - \int_{\Sigma} \llbracket t_{kl\dots n} \rrbracket v_j d\Gamma. \quad (4.44)$$

Hyppäykselle epäjatkuuuspinnan läpi on käytetty lyhennysmerkintää

$$\llbracket t_{kl\dots n} \rrbracket = t_{kl\dots n}^+ - t_{kl\dots n}^-. \quad (4.45)$$

Vastaavasti Reynoldsin kuljetuslause (3.9) saadaan muotoon

$$\begin{aligned} T_{kl\dots n}^{j\bullet(k)} &= \int_{\Omega} [t_{kl\dots n,0}^j + (t_{kl\dots n}^j U_j^k)_{,j}] d\Omega + \\ &+ \int_{\Sigma} (\llbracket t_{kl\dots n}^j \rrbracket W_j v_j - \llbracket t_{kl\dots n}^j U_j^k \rrbracket v_j) d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.46)$$

Soveltamalla lausekkeita (4.44) ja (4.46) yleiseen säilymislakiin (3.11) voidaan kirjoittaa yhtälö

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [A_{\alpha,0} + (A_{\alpha} U_{\beta})_{,\beta}] d\Omega &= - \int_{\Omega} j_{\alpha\beta,\beta} d\Omega + \int_{\Omega} B_{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{A}_{\alpha} d\Omega + \\ &- \int_{\Sigma} (\llbracket A_{\alpha} \rrbracket W_{\beta} v_{\beta} - \llbracket A_{\alpha} U_{\beta} \rrbracket v_{\beta}) d\Gamma - \int_{\Sigma} \llbracket j_{\alpha} \rrbracket d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Tästä saadaan sekä alueessa  $\Omega$  vallitseva paikallinen muoto (3.12) että epäjatkuuuspinnalla vallitseva paikallinen ehto

$$\llbracket A_{\alpha} \rrbracket W_{\beta} v_{\beta} - \llbracket A_{\alpha} U_{\beta} \rrbracket v_{\beta} - \llbracket j_{\alpha} \rrbracket = 0. \quad (4.48)$$

Siten yhtälöä (4.48) käyttäen voidaan lausua massan säilymislakeihin (3.16), liikemäärän taseen periaatteeseen (3.23) ja energian taseen periaatteeseen (3.32) liittyvät hyppyehdot:

$$\llbracket \rho^s \beta^s \rrbracket W_i v_i - \llbracket \rho^s \beta^s U_i^s \rrbracket v_i = 0, \quad (4.49)$$

$$\llbracket \rho^w \beta^w + \rho^i \beta^i \rrbracket W_i v_i - \llbracket \rho^w \beta^w U_i^w \rrbracket v_i - \llbracket \rho^i \beta^i U_i^i \rrbracket v_i = 0,$$

$$\sum_k \left\{ \llbracket \beta^k \rho^k U_i^k \rrbracket W_j v_j - \llbracket (\beta^k \rho^k U_i^k) U_j^k \rrbracket v_j + \llbracket \sigma_i^k \rrbracket \right\} = 0, \quad (4.50)$$

$$\sum_k \left\{ \left[ \left( e^k + \frac{1}{2} \beta^k \rho^k U_i^k U_i^k \right) W_j v_j - \left[ \left( e^k + \frac{1}{2} \beta^k \rho^k U_i^k U_i^k \right) U_j^k \right] v_j + \right. \right. \quad (4.51)$$

$$\left. \left. - \left[ \sigma_i^k U_i^k \right] + \left[ q_j^k \right] v_j \right\} = 0 .$$

Tarkastellaan ehtoja (4.49)...(4.51) lähemmin routarajalla. Tehdään tavanomaiset olettamukset (Salonen 1987) nopeuden jatkuvuudelle

$$\llbracket U_i \rrbracket = 0 \quad (4.52)$$

ja lämpötilan jatkuvuudelle

$$\llbracket T \rrbracket = 0 . \quad (4.53)$$

Tällöin ehdosta (4.49)<sub>1</sub> seuraa välittömästi, että  $\beta^s$  on jatkuva, mistä edelleen huokoisuuden  $n$  jatkuvuus. Kun funktiolle  $\tilde{f}$  käytetään muotoa (4.5), on huokosveden suhteellinen osuus  $\chi$  jatkuva. Siten myös  $\beta^w$  ja  $\beta^i$  ovat jatkuvia. Ehto (4.49)<sub>2</sub> voidaan kirjoittaa muotoon

$$\llbracket (\beta^w + \frac{\rho^i}{\rho^w} \beta^i) (W_i - U_i^s) \rrbracket v_i - \llbracket \beta^w V_i^w \rrbracket v_i = 0 , \quad (4.54)$$

josta edellisten päätelmien mukaan seuraa, että huokosveden virtausnopeus  $\beta^w V_i^w$  on jatkuva. Tällöin yhtälöstä (4.12) voidaan päätellä, että huokosveden paineen  $p^w / \beta^w$  gradientti on jatkuva, mutta subgradientin  $\hat{B}^w$  gradientti on epäjatkuva. Ehdosta (4.50) puolestaan nähdään helposti, että kokonaisjännitys on jatkuva, ja edelleen myös sen eri osat ovat jatkuvia. Koska huokosveden jäätymistä ei tapahdu vielä routarajalla, voidaan ehdosta (4.51) päätellä, että lämpövuoto on jatkuva. Täten myös lämpötilan gradientti on jatkuva.

Siten routarajalla on voimassa jatkuvuusehdot

$$\begin{aligned} \llbracket T \rrbracket &= 0 , \\ \llbracket \beta^k \rrbracket &= 0, \llbracket U_i^k \rrbracket = 0, \llbracket \sigma_{ij}^k \rrbracket = 0, \llbracket q_i^k \rrbracket = 0, \quad k \in \{s, w, i\} , \\ \llbracket \beta^w V_i^w \rrbracket &= 0, \llbracket T_{,i} \rrbracket = 0 . \end{aligned} \quad (4.55)$$

Todettakoon lopuksi, että esimerkiksi jäälinsien syntyessä tai huokosveden jäätyessä jo routarajalla ehdoista (4.55) ovat voimassa enää vain lämpötilan ja jännityksen jatkuvuusehdot.



#### 4.9 Routimistehtävän ainevakiot

Routimistehtävässä on tuntemattomien suureiden lisäksi myös tunnettuja suureita, jotka kuvaavat jäätyvän maan fysikaalisia ja mekaanisia ominaisuuksia. Edelleen niistä osa on tehtäväkohtaisia ja osa tehtävästä riippumattomia ainevakioita. Tehtäväkohtaisesti määritettäviä ainevakiota ovat sulan maan veden johtavuus  $k$ , huokosveden sitoutumisesta riippuva parametri  $a$  sekä raerungon tiheys, ominaislämpökapasiteetti, lämmönjohtavuus ja kaksi kimmovakioiden joukosta (kimmokerroin  $E^s$ , Poissonin suhde  $\nu^s$ , liukukerroin  $G^s$ , Lamén parametri  $\lambda^s$ , tilavuudenmuutoskerroin  $K^s$ ). Korostettakoon vielä, että kimmovakiot eivät ole yksittäisten maarakeiden vaan yksittäisistä maarakeista koostuvan raerungon ainevakioita. Tehtävästä riippumattomina ainevakioina voidaan pitää huokosveden ja huokosjään tiheyttä, ominaislämpökapasiteettia ja lämmönjohtavuutta sekä veden sulamislämpöä (taulukko 1).

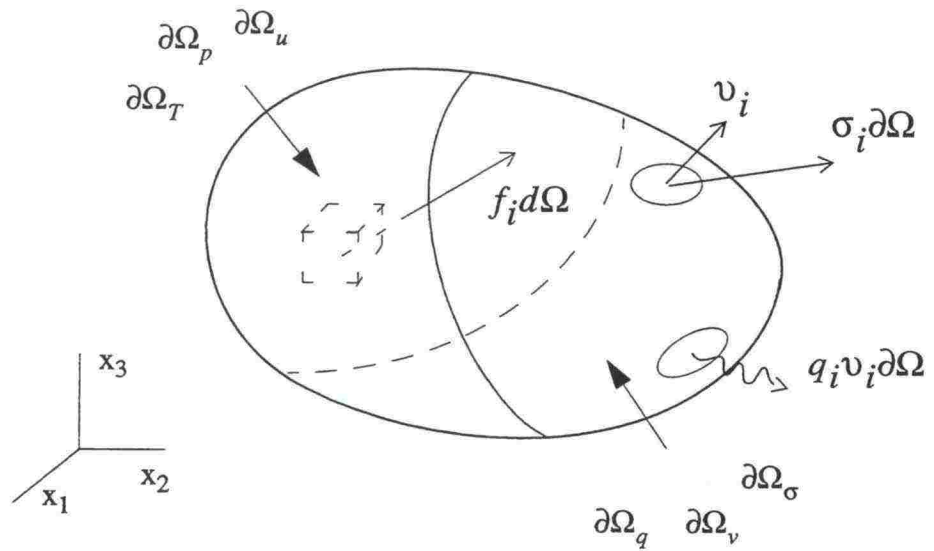
Taulukko 1: Huokosveden ja huokosjään ainevakioita.

Komponentti	$\rho$ [kgm <sup>-3</sup> ]	$C$ [Jkg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	$\kappa$ [Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	$\ell$ [Jkg <sup>-1</sup> ]
Huokosvesi	1000.0	4180.0	0.56	333.0 *10 <sup>3</sup>
Huokosjää	917.0	2100.0	2.24	

Mutta mitkä ovat huokosjään mekaaniset ainevakiot? Ilmeistä on, että tässä tapauksessa ei voida käyttää puhtaan kiinteän jään parametrejä, sillä esimerkiksi *Tsytoich (1975)* on havainnut, että puhdas kiinteä jää on viskoosisempi kuin jäätynyt maa. Ilmiö selittyy osittain sillä, että huokosjään ja raerungon välissä on huokosvesikerros, jonka paksuus riippuu lämpötilasta. Huokosjää ja raerunko eivät täten liity toisiinsa täysin jäykästi, vaan niiden välillä voi tapahtua liukumista. Näyttää siltä, että usein huokosjään mekaanisiksi ainevakioiksi valitaan tehtävän kannalta sopivimmat (*Shen & Landanyi 1987, Jiajie & Ming 1991*). Eräs mahdollisuus määrittää huokosjään ainevakiot on arvioida ne sulan ja jäädytetyn maan koetulosten perusteella.

#### 4.10 Yhteenveto

Kootaan edellä esitetyt routimistehtävän yhtälöt yhtenäiseksi yhtälösystemiksi käyttäen kuvan 13 merkintöjä. Valittuina perustuntemattomina esiintyvät lämpötila  $T$ , huokoisuus  $n$ , huokosveden suhteellinen osuus  $\chi$ , raerungon siirtymä  $u_i$ , huokosveden paine  $p^w/\beta^w$  ja huokosveden virtaamanopeus  $\beta^w V_i^w$ , yhteensä 10 kpl.



Kuva 13: Käytettyjä merkintöjä.

Vastaavat kenttäyhtälöt ovat

- jatkuvuusyhtälöt

$$-n_{,0} + [(1-n)u_{i,0}]_{,i} = 0 ,$$

$$\left[ \frac{k}{\rho^w g} \left( \frac{p^w}{\beta^w} \right)_{,i} \right]_{,i} + \left[ \frac{k}{\rho^w g} \left( \rho^w \frac{\ell T}{T_0} \tilde{f}_{,i} - \rho^w g_i \right) \right]_{,i} +$$

$$- \left[ \chi + (1-\chi) \frac{\rho^i}{\rho^w} \right] u_{i,i0} - \left( 1 - \frac{\rho^i}{\rho^w} \right) n (\chi_{,0} + \chi_{,i} u_{i,0}) = 0 ,$$

- tasapainoyhtälö

$$\left\{ (1-n) \chi \lambda^{1-p} K^p |d'_{ij}|^{p-2} d'_{ij} + (1-n) 2G^s u_{(j,i)} + \right.$$

$$\left. + \left[ (1-n) \left( K^s - \frac{2}{3} G^s \right) + (1-n) \chi K^i \right] u_{k,k} \delta_{ij} \right\}_{,j} +$$

$$- \left[ \frac{p^w}{\beta^w} - \rho^w \frac{\ell T}{T_0} (1-\chi) \chi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \chi} \right]_{,i} +$$

$$+ [\rho^s (1-n) + \rho^w \chi n + \rho^i (1-\chi) n] g_i = 0 ,$$

- energiayhtälö

$$C T_{,0} - (\kappa T_{,i})_{,i} + \rho^w C^w (\beta^w V_i^w) T_{,i} + \rho^w \frac{\ell T}{T_0} \theta^w = 0 ,$$

- faasinmuutosyhtälö

$$\chi = \begin{cases} \left\{ 1 - \frac{1}{a} \left[ \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + \left( \frac{1}{\rho^i} - \frac{1}{\rho^w} \right) \hat{B} \left( \frac{\ell T}{T_0} \right)^{-1} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}, & \text{kun } D \leq 0 \\ 1, & \text{kun } D > 0 \end{cases},$$

- Darcyn yhtälö

$$\beta^w V_i^w = - \frac{k}{\rho^w g} \left[ \left( \frac{p^w}{\beta^w} \right)_{,i} - \rho^w g_i + \rho^w \frac{\ell T}{T_0} \tilde{f}_{,i} \right].$$

Perustuntemattomien valintoja vastaavat reunaehdot ovat

- termiset reunaehdot

$$\begin{aligned} T(x_j, t) &= \bar{T}(x_j, t) & \partial\Omega_T \\ -\kappa(x_j, T) T_{,i} v_i &= \bar{q}(x_j, t) & \partial\Omega_q, \end{aligned}$$

- mekaaniset reunaehdot

$$\begin{aligned} u_i(x_i, t) &= \bar{u}_i(x_i, t) & \partial\Omega_u \\ \sigma_{ij}(x_i, t) v_j &= \bar{\sigma}_i(x_i, t) & \partial\Omega_\sigma \end{aligned}$$

$$\frac{p^w}{\beta^w}(x_j, t) = \bar{p}(x_j, t) \quad \partial\Omega_p$$

$$\beta^w V_i^w(x_j, t) v_i = \bar{v}(x_j, t) \quad \partial\Omega_v.$$

Lisäksi on esitettävä alkuehtoina tiedot lämpötilasta, raerungon siirtymästä ja huokoisuudesta alkuhetkellä alueessa ja sen reunalla.

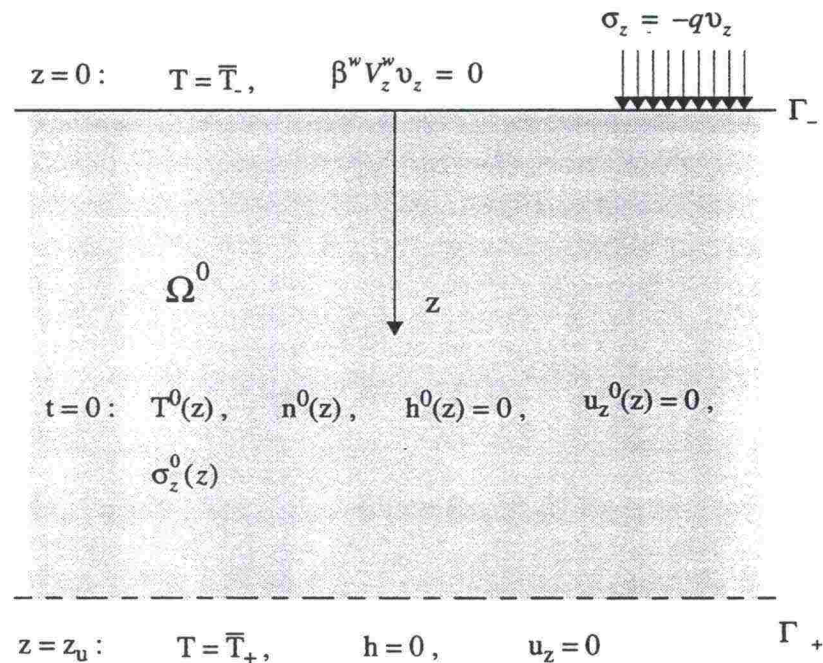


## 5 YKSIULOTTEISEN TAPAUKSEN TARKASTELU

### 5.1 Yksiulotteinen routimistehtävä

Valitaan yksiulotteisen tapauksen koordinaatisto siten, että origo on maanpinnan tasalla ja syvyyttä kuvaava  $z$ -akseli juoksee alaspäin (kuva 13). Yksiulotteisen tapauksen yhtälöt muodostetaan yksiaksisiaalisessa siirtymätilassa. Tällöin kaikki muut paitsi  $z$ -akselin suuntaiset siirtymät häviävät:

$$u_z = u_z(z, t), \quad u_x = 0, \quad u_y = 0. \quad (5.1)$$



Kuva 14: Routimistehtävän yksiulotteinen tapaus.

Oletetaan, että ennen routimisprosessin käynnistymistä vallitsee stationääri-tila, jota pidetään referenssi- eli alkutilana. Tilan määrittävät muuttujien arvot, joihin viitataan merkinnöillä ( )<sup>0</sup>:

$$\begin{aligned} T(z, 0) &= T^0(z) > T_0, \\ n(z, 0) &= n^0(z), \\ h(z, 0) &= h^0(z) \equiv 0, \\ u_z(z, 0) &= u_z^0(z) \equiv 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\sigma_z(z, 0) = \sigma_z^0(z) = - \int_0^z g_z [(1 - n^0) \rho^s + n^0 \rho^w] dz,$$

missä huokosveden paineen suhteen on tehty muuttujan vaihdos

$$h = \frac{p^w}{\rho^w} - \rho^w g z. \quad (5.3)$$

Siten jatkossa operoidaan käyttäen huokosveden paineen muutosta  $h$ , joka ilmoittaa huokosveteen jäätyemisessä syntyvän alipaineen. Referenssitila (5.2) vastaa sulan maan tilaa, jossa tarkastelun alkuhetkellä ei esiinny siirtymiä ja huokosveden virtausta. Määritelmistä (5.2) neljä ensimmäistä toimivat routimistehtävän alkuehtoina.

Routimistehtävän yksiulotteisen tapauksen yhtälösystemi muodostetaan yhtälöistä (4.11), (4.12), (4.14), (4.24), (4.29) ja (4.34). Tehdään tarvittavat muuttujien vaihdokset sekä otetaan huomioon alkujännitykset ja huokosjään osalta vain kimmoiset ominaisuudet. Siten saadaan yhtälösystemi

$$\begin{aligned} n_{,0} - [(1-n)u_{z,0}]_{,z} &= 0, \\ \left( \frac{k}{\rho^w g} h_{,z} \right)_{,z} - \kappa_e h_{,0} + S &= 0, \\ (M u_{z,z})_{,z} - \left( h + 2\rho^w \frac{\ell T}{T_0} \bar{f} \right)_{,z} + f_z^* &= 0, \\ C T_{,0} - (\kappa T_{,z})_{,z} + \rho^w C^w (\beta^w V_z^w) T_{,z} + \rho^w \frac{\ell T}{T_0} \theta &= 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\chi = \begin{cases} \left\{ 1 - \frac{1}{a} \left[ \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + \left( \frac{1}{\rho^i} - \frac{1}{\rho^w} \right) \hat{B} \left( \frac{\ell T}{T_0} \right)^{-1} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}, & \text{kun } D \leq 0 \\ 1, & \text{kun } D > 0 \end{cases},$$

$$\beta^w V_z^w = - \frac{k}{\rho^w g} \left( h_{,z} + \rho^w \frac{\ell T}{T_0} \bar{f}_{,z} \right),$$

jossa

$$\begin{aligned} S &= \left[ \frac{k}{\rho^w g} \left( \rho^w \frac{\ell T}{T_0} \bar{f}_{,z} \right) \right]_{,z} - \kappa_e \left( 2\rho^w \frac{\ell T}{T_0} \bar{f} - p \right)_{,0} - \left( 1 - \frac{\rho^i}{\rho^w} \right) n \chi_{,0}, \\ \kappa_e &= \frac{1}{K} \left[ \chi + (1-\chi) \frac{\rho^i}{\rho^w} \right], \\ K &= (1-n) K^s + (1-n) \chi K^i, \\ M &= (1-n) \left( K^s + \frac{4}{3} G^s \right) + (1-\chi) n K^i, \\ f_z^* &= [\rho^s (n^0 - n) + \rho^w (\chi n - n^0 - 1) + \rho^i (1-\chi) n] g_z, \\ \bar{f} &= a \frac{(1-\chi)^2}{\chi^2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

ja

$$\begin{aligned}
 C &= (1-n)\rho^s C^s + \chi n \rho^w C^w + (1-\chi)n\rho^i C^i, \\
 \kappa &= (1-n)\kappa^s + \chi n \kappa^w + (1-\chi)n\kappa^i, \\
 \theta &= \rho^w [\chi \chi_{,0} + (\beta^w V_z^w)_{,z}], \\
 D &= \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + \left(\frac{1}{\rho^i} - \frac{1}{\rho^w}\right) \hat{B} \left(\frac{\ell T}{T_0}\right)^{-1}, \\
 \hat{B} &= h + \rho^w g z - \rho^w \frac{\ell T}{T_0} \chi \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \chi}.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Yhtälösystemi ratkaistaan reunaehdoilla (kuva 14)

$$\begin{aligned}
 T(0, t) &= \bar{T}_-(t) \\
 \beta^w V_z^w(0, t) v_z &= 0 & \Gamma_-, \\
 \sigma_z(0, t) &= \bar{\sigma}_z(t) = -q v_z \\
 T(z_u, t) &= \bar{T}_+(t) \\
 h(z_u, t) &= 0 & \Gamma_+, \\
 u_z(z_u, t) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

## 5.2 Routimistehtävän ratkaiseminen

Routimistehtävän (5.4) ratkaiseminen käsittää lämmönsiirtymisanalyysin, huokosveden virtausanalyysin ja raerungon siirtymäanalyyisin. Lämmönsiirtymisen johtumalla ja konvektiolla yhdistettynä faasinmuutokseen muodostaa lämmönsiirtymistehtävän, jonka analysoinnin tavoitteena on määrittää lämpötilakenttä ja huokosveden suhteellinen osuus käyttäen yhtälöitä (5.4)<sub>4</sub> ja (5.4)<sub>5</sub>. Huokosveden virtausanalyysin tavoitteena on määrittää huokosveden jäätymisestä aiheutuva imu ja virtausnopeuskenttä yhtälöiden (5.4)<sub>2</sub> ja (5.4)<sub>6</sub> avulla. Raerungon siirtymäanalyyysissä määritetään ulkoisesta kuormituksesta ja termodynaamisen paineen muutoksista syntyvät raerungon siirtymät sekä maan huokoisuuden muutokset käyttäen yhtälöitä (5.4)<sub>1</sub> ja (5.4)<sub>3</sub>.

Routimistehtävän ratkaisumenetelmä on esitetty liitteessä 2. Routimistehtävä ratkaistiin numeerisesti käyttäen elementtimenetelmää. Numeerisen käsittelyn kannalta merkittävintä oli vallitsevien suureiden jatkuvuus. Tällöin välttyttiin faasinmuutoksen aiheuttamilta tyypillisiltä epäjatkuvuusongelmilta. Kun lisäksi konvektio ei ollut hallitseva, voitiin ratkaisemisessa soveltaa standardimenetelmää. Niinpä yhtälöt (5.4) diskretoitiin käyttäen jäännösformulaatiota sekä Galerkinin keinoa paikan suhteen ja ns. epäjatkuvaa Galerkinin keinoa ajan suhteen. Routimistehtävässä esiintyvän epälineaarisuuden vuoksi



ratkaisu jouduttiin iteroimaan, mikä suoritettiin Newton-Raphsonin menetelmällä. Kiinteä elementtiverkko muodostettiin kaksisolmuisista janaelementeistä ja tuntemattomien suureiden approksimoinnissa käytettiin lineaarisia muotofunktioita paikkaulottuvuudessa ja vakioapproksimaatiota aikaulottuvuudessa.

Routimistehtävän ratkaisun kulku oli kaksiosainen. Ensiksi määritettiin lämpötilakenttä ja huokosveden suhteellinen osuus tietyn aikajakson  $\Delta T$  (esim. 10min) päähän käyttäen adaptiivista aika-askelta  $\Delta \tau$ . Tämän jälkeen päivitetiin huokosveden paineen muutokset, virtaamanopeus, raerungon siirtymät sekä huokoisuuden muutokset käyttäen tunnettua lämpötilakenttää ja huokosveden suhteellista osuutta sekä kiinteää aika-askelta  $\Delta T$ . Tätä proseduuria toistettiin, kunnes saavutettiin tavoiteltu kokonaisaika.

Laskelmat tehtiin käyttäen *Freundin* laatimaa ohjelmakunkoa, joka soveltuu epästationääristen ja epälineaaristen tehtävien ratkaisemiseen. Routimistehtävän systeemi yhtälöiden muodostamiseksi laadittiin tarvittavat Fortran-kieliset aliohjelmat (*liite 3*). Lisäksi lähtötiedot annettiin ja laskentaa ohjattiin erityisen lähtötiedoston välityksellä (*liite 4*).

## 5.3 Esimerkilaskelmat

### 5.3.1 Lähtötiedot

Esimerkilaskelmat suoritettiin käyttäen vertailukohteena erästä vakio­lämpötilakokeena tehtyä routanousukoetta (*Friberg & Slunga 1989*). Laboratoriokokeen koejärjestely on esitetty *liitteessä 5*. Kokeen alkuhetkellä maanäyte oli ollut vakio­lämpötilassa  $+3^{\circ}\text{C}$  ja täysin vedellä kyllästetty. Routanousukokeessa näytteen yläpään lämpötilana oli pidetty  $-3^{\circ}\text{C}$  ja alapään  $+3^{\circ}\text{C}$ . Näyte oli ollut kokeen ajan kuormittamaton. Routanousukokeen kokonaiskesto oli ollut 24h. Maalajiluokituksessa näyte oli luokiteltu siltiksi ja sille oli määritetty mm. kiintotiheys, huokoisuus ja vedenjohtavuus (*taulukko 2*). Todennäköisesti se oli ylikonsolidoitunut. Raerungon ominaislämpökapasiteetille ja lämmönjohtavuudelle käytettiin maalajille keskimääräisiä arvoja (*taulukko 2*).

Ennalta määrittämättömiä parametrejä olivat huokosveden sitoutumisesta riippuva parametri  $a$  sekä kimmovakiot. Näiden sekä ulkoisen kuormituksen  $q$  suhteen suoritettiin eräänlainen herkkyyssanalyysi. Parametrien vaihteluvälit on esitetty *taulukossa 3* ja lisäksi parametrin  $a$  merkitystä on havainnollistettu *kuvassa 15*.

Taulukko 2: Huokosveden ja huokosjään ainevakioita.

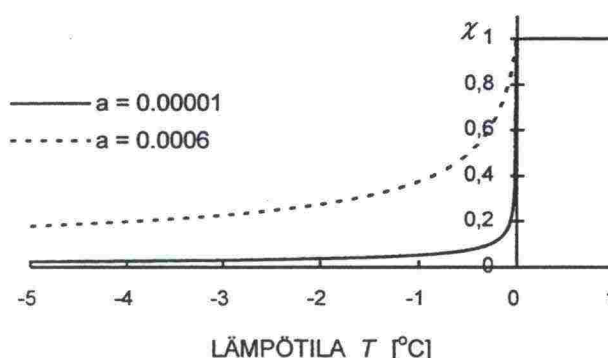
$n^0$ [ ]	$k$ [ms <sup>-1</sup> ]	$\rho$ [kgm <sup>-3</sup> ]	$C$ [Jkg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	$\kappa$ [Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
0.39	$5.0 \times 10^{-8}$	2726.0	*900.0	*2.0

\* maarakeille keskimääräinen

Taulukko 3: Herkkyyksianalyysissä käytettyjen parametrien vaihteluvälit.

$a$ [ ]	$E$ [MPa]	$\nu$ [ ]	$E'$ [MPa]	$\nu'$ [ ]	kuormitus $q$ [kPa]
$0.1 \dots 6 \cdot 10^{-4}$	**0.5...100	0.4	0...1000	0.3	0...600

\*\* sulan maan kimmokerroin, raerungon kimmokerroin  $E^s \approx E/(1-n^0)$ .



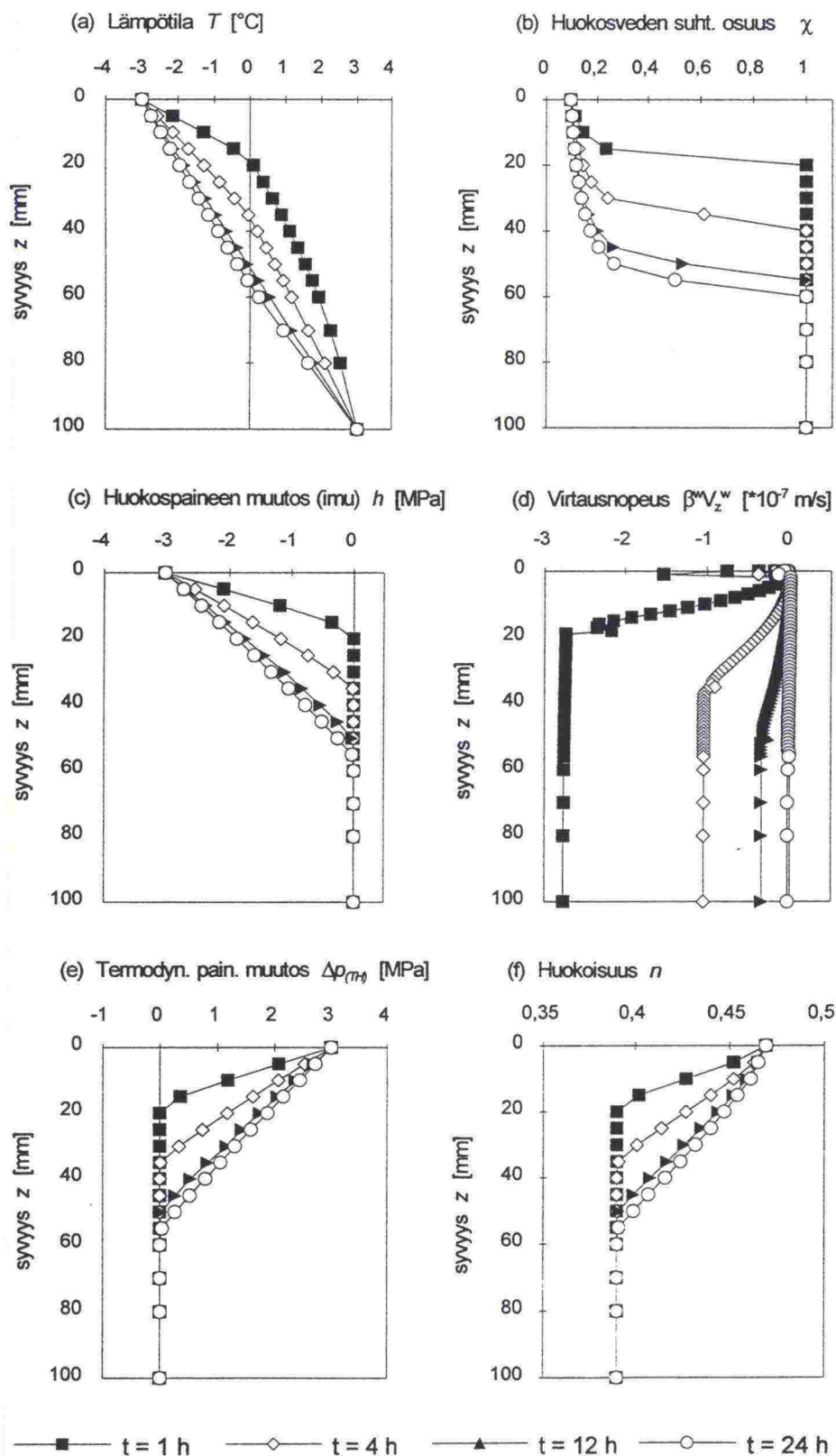
Kuva 15: Parametrin  $a$  vaikutus huokosveden suhteelliseen osuuteen.

Laskelmat tehtiin yläosastaan tihennetyllä 63 solmuisella elementtiverkolla käyttäen kiinteää aika-askelta  $\Delta T = 10$  min. Erään tapauksen tulostuksen listaus ajanhetkellä  $t = 1$  h on esitetty liitteessä 6.

### 5.3.2 Tulokset ja tulosten tarkastelu

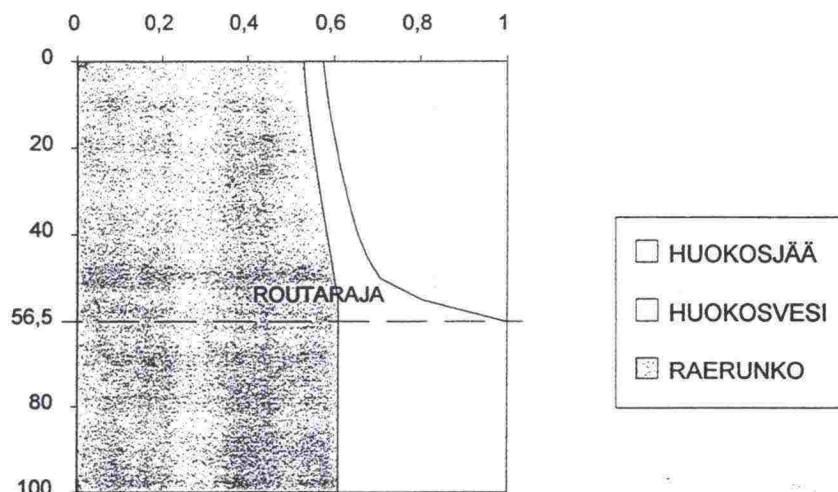
Tapaus  $a = 0.0001$ ,  $E = 10$  MPa,  $E' = 10$  MPa ja  $q = 0$  kPa

Kuvissa 16 (a)...(e) on esitetty järjestyksessä lämpötila  $T$ , huokosveden suhteellinen osuus  $\chi$ , huokosveden alipaine  $h$ , virtausnopeus  $\beta^w V_z^w$ , termodynaamisen paineen muutos  $\Delta p_{TH} = p_{TH} - \rho^w g z$  ja huokoisuus  $n$  syvyyden funktiona ajan hetkellä  $t = 1$  h, 4 h, 12 h, 24 h. Kuvassa 17 on esitetty komponenttien tilavuusosat  $\beta^k$  ajan hetkellä  $t = 24$  h. Routanousun ja roudan tunkeutumisen lasketut tulokset ja koetulokset on esitetty ajan funktiona kuvassa 18. Siinä on esitetty myös routanousu tapauksissa, joissa maan kimmokertoimelle on käytetty arvoja 20 MPa ja 30 MPa.

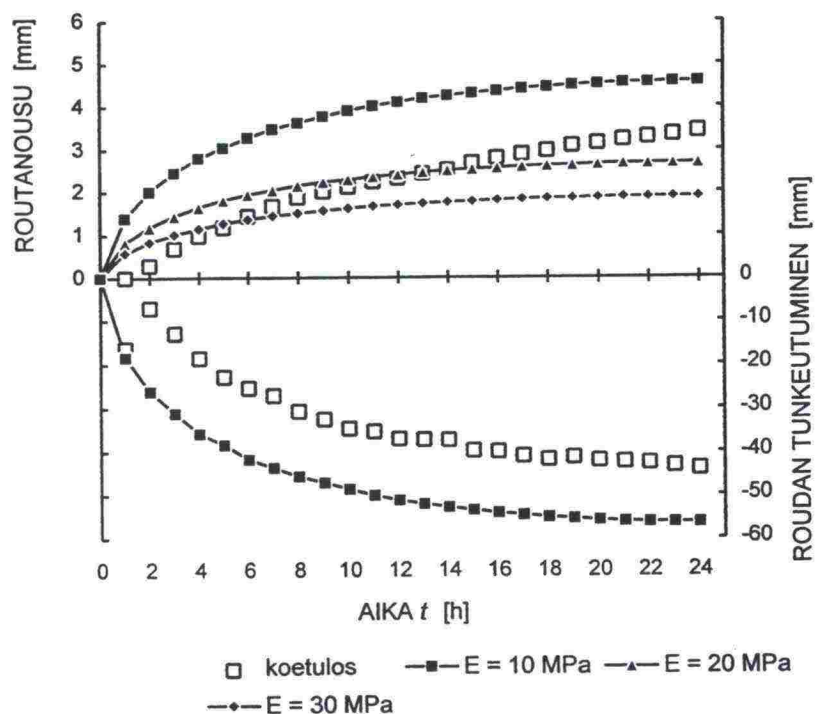


Kuva 16: (a) lämpötilan, (b) huokosveden suhteellisen osuuden, (c) huokosveden paineen muutoksen (imu), (d) huokosveden virtausnopeuden, (e) termodynaamisen paineen muutoksen ja (f) huokoisuuden lasketut arvot, kun  $a = 0.0001$ ,  $E = 10$  MPa,  $E^i = 10$  MPa ja  $q = 0$  kPa. Alkulämpötila  $T^0(z) = +3$  °C. Maalaji ylikonsolidoitunut siltti.





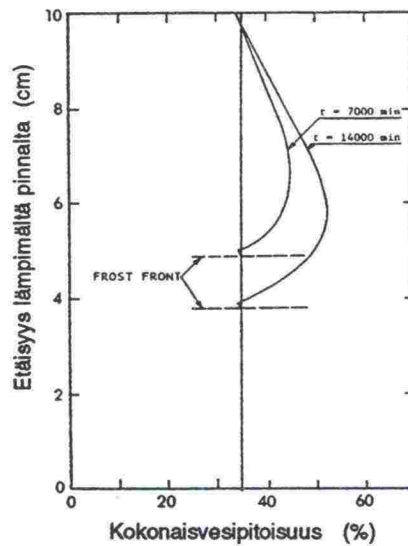
Kuva 17: Komponenttien tilavuusosat  $\beta^k$  ajan hetkellä  $t = 24h$ , kun  $a=0.0001$ ,  $E = 10 \text{ MPa}$ ,  $E^i = 10 \text{ MPa}$  ja  $q = 0 \text{ kPa}$ . Alkulämpötila  $T^0(z) = +3 \text{ }^\circ\text{C}$ . Maalaji ylikonsolidoitunut siltti.



Kuva 18: Routanousun ja roudan tunkeutumisen lasketut tulokset ja koetulokset, kun  $a = 0.0001$ ,  $E = 10 \text{ MPa}$ ,  $E^i = 10 \text{ MPa}$  ja  $q = 0 \text{ kPa}$ . Alkulämpötila  $T^0(z) = +3 \text{ }^\circ\text{C}$ . Maalaji ylikonsolidoitunut siltti.

Tarkastelemalla *kuvia 16...18*, voidaan tehdä seuraavat havainnot:

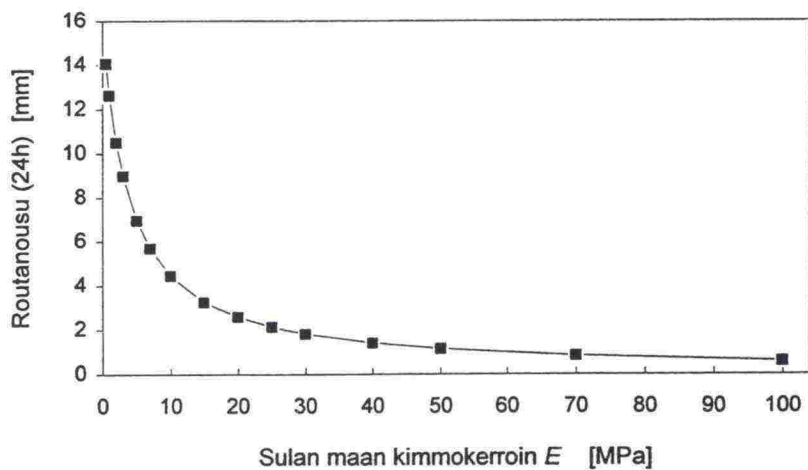
- (a) Suurin osa huokosveden jäätymisestä tapahtuu varsin kapeassa vyöhykkeessä aivan routarajan yläpuolella (*kuva 16(b)*).
- (b) Huokosvedessä vallitseva alipaine (imu) (*kuva 16(c)*) on routimisvyöhykkeessä *Williamsin (1991)* arvion  $(1,2 \text{ MPa}/^{\circ}\text{C})$  suuntainen (vertaa *kuva 7*).
- (c) Kohdan 4.2 oletamus huokosveden virtausta vastustavan voiman automaattisesta huomioon ottamisesta routimisvyöhykkeessä näyttää toteutuvan (*kuva 16(d)*). Virtausnopeudessa esiintyvät heilahtelut johtuvat ilmeisesti siitä, että routimisen alkuvaiheessa huokosveden virtausnopeus on suurimmillaan aivan näytteen yläpinnan tuntumassa, jolloin reunaehdon  $(5.7)_2$  toteutuminen vaatii virtauksen häviämistä hyvin lyhyellä matkalla, mitä käytetty laskentamenetelmä ei sen yksinkertaisuuden vuoksi kykene toteuttamaan. Virtausnopeus on kuitenkin niin pieni, ettei heilahtelulla ole havaittavaa vaikutusta lopputulokseen. Se myös näyttää vaimenevan ajan kuluessa.
- (d) Systeemin tilassa tapahtuvat muutokset kuten roudan tunkeutumisnopeus, huokosveden virtausnopeus ja roudan nousunopeus ovat suurimmillaan heti routimisen käynnistyttyä hidastuen sitten asteittain systeemin lähestyessä stationääristä tilaa. Laskentamallin stationäärisessä tilassa lämpötilakenttä pysyy muuttumattomana, huokosveden jäätyminen lakkaa ja virtaus pysähtyy, routanousu ja roudan tunkeutuminen ovat saavuttaneet maksimiarvonsa ja lämpöä siirtyy enää vain johtumalla. Routanousun koetulosten perusteella voidaan kuitenkin päätellä, että todellisuudessa huokosveden jäätyminen ja virtaus jatkuvat. Tällöin voidaan kyseenalaistaa termin  $(1-\rho/\rho^w)\eta\chi_i\mu_{i,0}$  jättäminen pois yhtälöstä (4.35) sen vähäisen merkityksen vuoksi. Tähän käytetty malli ei pysty antamaan vastausta, sillä raerungon kimmoisesta käyttäytymisestä seuraa, että raerungon nopeus häviää stationäärisessä tilassa.
- (e) Oletamus maan kimmoisesta käyttäytymisestä näyttää antavan routanousulle oikean suuntaisen mutta karkean approksimaation silloin, kun systeemi ei ole vielä saavuttanut stationääristä tilaa eli kun routaraja etenee riittävällä nopeudella (*kuva 18*). Oletamuksen karkeus näkyy myös huokoisuuden arvoissa, sillä vastaavan tyyppisissä kokeissa (*Jame & Norum 1980, Penner 1986, Frémond 1988*) on havaittu, että huokoisuus kasvaa hyvin nopeasti heti routarajan yläpuolella saavuttaen maksimiarvonsa routarajan läheisyydessä (*kuva 19*).
- (f) Koetulosten outo käyttäytyminen (*kuva 18*) routimisen alkuvaiheessa johtuneen routimisprosessin käynnistymisvaikeuksista.



Kuva 19: Vesipitoisuuden jakautuminen Pennerin (1986) mukaan.

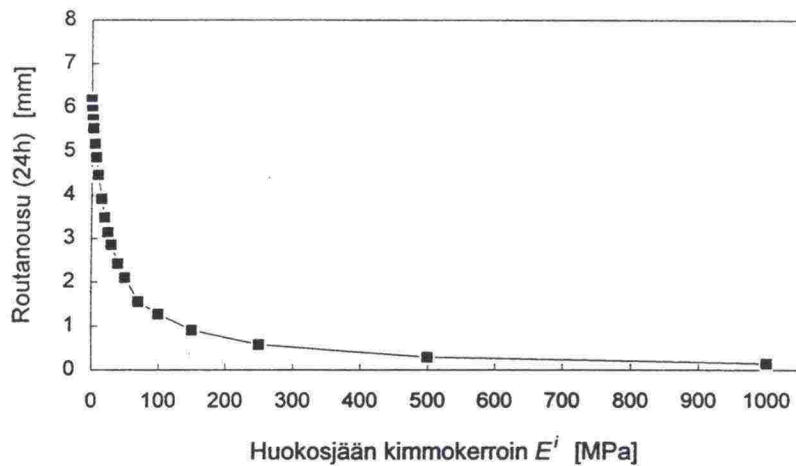
### Routanousun herkkyyshanalyysi

Kuvissa 20...23 on havainnollistettu sulan maan ja huokosjään kimmokertoimien, parametrin  $a$  sekä kuormituksen  $q$  vaikutus routanousun maksimiarvoon.

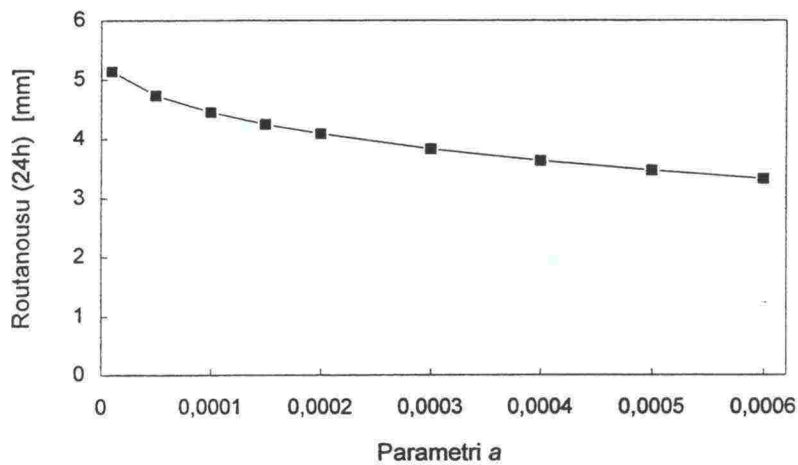


Kuva 20: Sulan maan kimmokertoimen  $E$  vaikutus routanousuun, kun  $E^i = 10 \text{ MPa}$ ,  $a = 0.0001$  ja  $q = 0 \text{ kPa}$ . Maalaji ylikonsolidoitunut siltti.

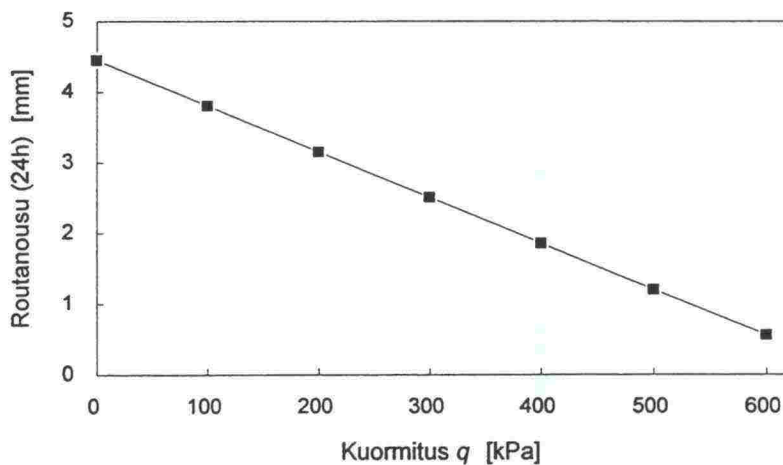




Kuva 21: Huokosjään kimmokertoimen  $E^i$  vaikutus routanousuun, kun  $E = 10$  MPa,  $a = 0.0001$  ja  $q = 0$  kPa. Maalaji ylikonsolidoitunut siltti.



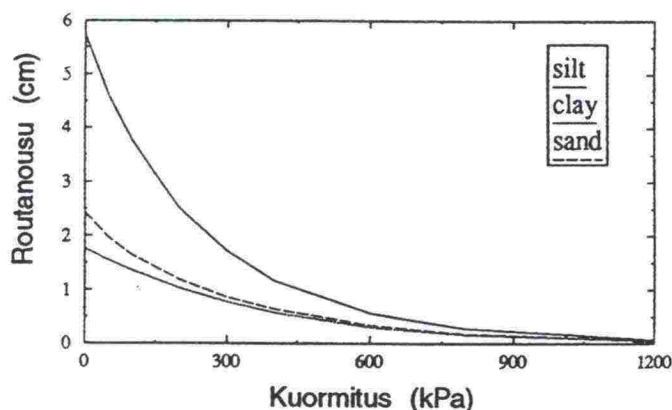
Kuva 22: Parametrin  $a$  vaikutus routanousuun, kun  $E = 10$  MPa,  $E^i = 10$  MPa ja  $q = 0$  kPa. Maalaji ylikonsolidoitunut siltti.



Kuva 23: Kuormituksen  $q$  vaikutus routanousuun, kun  $a = 0.0001$ ,  $E = 10$  MPa,  $E^i = 10$  MPa. Maalaji ylikonsolidoitunut siltti.

Kuvia 20..23 tarkastelemalla voidaan tehdä seuraavat havainnot:

- (a) Sulan maan kimmokertoimen pienillä arvoilla on merkittävä vaikutus routanousun suuruuteen (kuva 20). Tällöin kuitenkin oletamus kimmoisesta käyttäytymisestä on yhä virheellisempi, sillä maa on ns. normaalisti konsolidoitunut tai jopa alikonsolidoitunut ja muodonmuutokset tapahtuvat pääasiassa plastisesti. Jotta oletamusta maan kimmoisesta käytäytymisestä voidaan käyttää routanousun jonkinlaisessa approksimoinnissa, täytyy näin ollen edellyttää, että maa on ylikonsolidoitunut.
- (b) Huokosjään kimmokertoimella on sulan maan kimmokertoimen suuntainen vaikutus routanousuun. Kuva 21 osoittaa, ettei huokosjään kimmokertoimelle voida kyseisessä tapauksessa käyttää puhtaan kiinteän jään kimmokertoimen arvoja.
- (c) Parametrin  $a$  merkityksen selventämiseksi oletetaan, että se riippuu ainoastaan mineraalipartikkelien ominaispinta-alasta partikkelien sähköi sen varaustason pysyessä muuttumattomana. Parametri  $a$  on täten sitä suurempi mitä suurempi ominaispinta-ala on. Routanousuun parametrilla  $a$  on päinvastainen vaikutus eli mitä suurempi parametri  $a$  sitä pienempi routanousu (kuva 22), mikä selittyy pienemmällä imu- ja routimisvoimalla. Tätä ilmiötä ei kuitenkaan pidä yleistää muihin tapauksiin. Fribergin & Slungan (1989) mukaan ominaispinta-alaan perustuvaa routimiskriteeriä voidaan soveltaa ainoastaan moreenimaalajeille.
- (d) Ulkoisen kuormituksen vaikutus (kuva 23) on Shengin & Knutssonin (1993) esittämien tulosten suuntainen (kuva 24). Todettakoon, että laskelmien referenssitaso on kuormittamaton, jolloin routanousu on kuormittamattoman tapauksen routanousu vähennettynä kuormituksen aiheuttama kimmoinen siirtymä. Mikäli referenssitila on kuormitettu ja maan kimmoinen kokoonpuristuma on jo otettu huomioon, on routanousu kuormituksesta riippumaton.



Kuva 24: Kuormituksen vaikutus routanousuun Shengin & Knutssonin (1993) mukaan.

## 6 PÄÄTELMÄT

Maan routimisen olennaisin piirre on sitoutuneen huokosveden jäätyminen, josta aiheutuvan imun routimisvyöhykkeeseen kuljettaman huokosveden jäätyminen siihen liittyvän tilavuuden kasvun kanssa aiheuttaa maan huokoisuuden kasvun ja routanousun. Sitoutuneen huokosveden jäätyminen on irreversiibeli, spontaani prosessi, ja se vaatii tapahtuakseen normaalia jäätympistettä ( $0^{\circ}\text{C}$ ) alemman lämpötilan. Termomekaanisessa mallissa huokosveden sitoutumisen vaikutusta sen jäätymiseen on kuvattu konveksisella funktiolla  $f$  muuttujinaan komponenttien tilavuusosat.

Matemaattinen malli, joka perustuu kontinuumimekaniikan ja makroskooppisen termodynamiikan periaatteisiin, kykenee kuvaamaan routimisprosessin eri vaiheet ja niiden väliset riippuvuudet ja seuraukset. Mm. seuraavien ilmiöiden selitys sisältyy malliin: vedessä vallitseva paine laskee jäätymlämpötilaa ja veden jäätyminen maan huokosissa pienentää routimiskerroksen vedenläpäisevyyttä. Sitoutuneen huokosveden jäätymisprosessin irreversiibelin luonteen vuoksi maan routimisen termomekaanista mallia on täydennettävä, jotta sitä voitaisiin käyttää käänteisesti maan sulamisilmiön kuvaamiseksi.

Yleisestä termomekaanisesta mallista (luku 3) voidaan konstitutiivisten yhteyksien avulla muodostaa tapauskohtaiset mallit valitsemalla sopivat vapaan energia ja dissipaatiopotentiaalin lausekkeet, mikä edellyttää, että tunnetaan funktio  $f$  sekä muut materiaaliominaisuudet.

Lähes kaikki termomekaanisessa mallissa käytetyt materiaaliparametrit ovat sulan maan parametrejä, jotka ovat maamekaniikassa yleisesti tunnettuja ja hyväksyttyjä. Uutta mallissa ovat funktion  $f$  parametrit. Ne voidaan määrittää menetelmällä, jota käytetään huokosveden suhteellisen osuuden ja lämpötilan välisen suhteen määrittämiseen. Täten vältetään useissa routimismalleissa esiintyviltä ongelmallisilta parametrien määrittäyksiltä. Huomattavaa on, että suotovirtaus- ja konsolidaatiotehtävä ovat routimistehtävän erikoistapauksia. Periaatteessa onkin mahdollista muodostaa yksi yleinen termomekaaninen malli, joka soveltuu kaikkiin maamekaniikan tehtäviin.

Olettamusta maan kimmoisesta käyttäytymisestä ja vallitsevien suureiden jatkuvuuksista voidaan käyttää routivan maan routanousun arvioimiseen, mikäli maa on ylikonsolidoitunut ja epäjatkovuuksia, kuten jäälinsskejä ei esiinny.

Vaikka routiminen on matemaattisesti varsin monimutkainen systeemi, mahdollistaa vallitsevien suureiden jatkuvuus sangen yksinkertaisten menetelmien ja approksimaatioiden käytön sen numeerisessa ratkaisemisessa.



Tässä työssä tarkastelun kohteena ollut yksiulotteinen tapaus on matemaattisen mallin yksinkertaisin tapaus. Täten lisäselvitystä vaativat

- jäätyneen maan muodonmuutoksen ja jännityksen välinen riippuvuus,
- huokoisuuden kasvun realistisempi kuvaus (vrt. kuva 19),
- funktion  $f$  määrittäminen, kun osa huokosvedestä jäätyy jo routarajalla,
- liuenneiden suolojen vaikutus jäätymiseen,
- vedellä osittain kyllästynyt tapaus,
- epäjatkuvuuksien (esim. jäälinssit) huomioon ottaminen,
- tarkastelun laajentaminen kaksi- tai kolmiulotteiseksi.

Lisäksi olisi tarkoituksenmukaista mallintaa myös maan sulamisilmiö, joka liittyy käytännössä hyvin läheisesti maan routimisilmiöön.

## 7 KIRJALLISUUSLUETTELO

Blanchard, D. & Frémond, M. 1985. Soils frost heaving and thaw settlement. In: Ground freezing. Proceedings of the fourth international symposium on ground freezing. 5-7 August 1985. Sapporo, Japan. s. 209-216. ISBN 90-6191-604-6

Carslaw, H. S. & Jaeger, J. C. 1986. Conduction of heat in solids. Oxford: Clarendon Press. 510 s. ISBN 0-19-853368-3

Crank, J. 1984. Free and moving boundary problems. Oxford: Clarendon Press. 425 s. ISBN 0-19-853357-8

Edlefsen, N. E. & Anderson, B. C. 1943. Thermodynamics of soil moisture. *Hilgardia, A Journal of Agricultural Science*, vol 15 no 2, 298 s.

Frémond, M. 1988. Mixtures and Phase Changes in Solid Mechanics. Espoo: Helsingin Teknillinen Korkeakoulu, Tietotekniikan osasto, Mekaniikan laboratorio. III Suomen Mekaniikapäivien esitelmät. s. 1-33. ISBN 951-754-498-7

Frémond, M. & Mikkola, M. 1991. Thermomechanical modelling of freezing soil. In: Ground freezing 91. Volume 1. Proceedings of the sixth international symposium on ground freezing. 10-12 September 1991. Beijing, China. s. 17-24. ISBN 90-5410-017-6

Frémond, M. & Nicolas, P. 1990. Macroscopic thermodynamics of porous media. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol 2, s. 119-139.

Freund, J. 1990. On solving a parabolic equation by the combined discontinuous-Galerkin Petrov-Galerkin finite element method. Espoo: Helsingin Teknillinen Korkeakoulu, Tietotekniikan osasto, Mekaniikan laboratorio. 24 s. (Otaniemi 29/1990). ISBN 951-22-0449-5

Freund, J. & Salonen, E-M. 1990. Heikkojen muotojen painofunktioista. *Rakenteiden mekaniikka*, vol 23 no 3, s. 18-61. ISSN 0783-6104

Freund, J. & Salonen, E-M. 1990. Notes on Petrov-Galerkin weighting functions in convection-diffusion equation. Espoo: Helsingin Teknillinen Korkeakoulu, Tietotekniikan osasto, Mekaniikan laboratorio. 38 s. (Otaniemi 28/1990). ISBN 951-22-0448-7

Friberg, P. & Slunga, E. 1989. Maalajien routivuuskriteerien kehittäminen. Espoo: Teknillinen Korkeakoulu, Rakennetekniikan laitos, Pohjarakennus ja maamekaniikka. 130 s. + 2 liitettä. (Diplomityö).

Germain, P & Nguyen, Q. S. & Suquet, P. 1983. Continuum Thermodynamics. Journal of Applied Mechanics, Translations of the ASME, vol. 50, s. 1010-1020.

Holden, J. T. & Jones, R. H. & Dudek, S. J. M. 1980. Heat and mass flow associated with a freezing front. Engineering geology, vol 18 no 1-4, s. 153-164.

Horiguchi, K. 1987. An osmotic model for soil freezing. Cold Regions Science and Technology, vol 14 no 1, s. 13-22.

Jame, Y-W. & Norum, D. 1980. Heat and Mass Transfer in a Freezing Unsaturated Porous Medium. Water Resources Research, vol. 16, no 4, s. 811-819.

Jiajie, W. & Ming, Z. 1991. Back analysis of measured displacements of freeze wall in shaft modelling. In: Ground freezing 91. Volume 1. Proceedings of the sixth international symposium on ground freezing. 10-12 September 1991. Beijing, China. s. 285-290. ISBN 90-5410-017-6

Johnson, C. 1987. Numerical solution of partial differential equations by the finite element method. Sweden: Studentlitteratur. 278 s. ISBN 91-44-25241-1

Jumikis, A. R. 1966. Thermal soil mechanics. New Brunswick, New Jersey: Rutgers university press. 267 s.

Kivinen, A. & Mäkitie, O. 1978. Kemia. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava. 460 s. ISBN 951-1-04393-5

Kujala, K. 1985. Maan koostumus ja rakenne. Suomen rakennusinsinöörien liitto, RIL 157-I Geomekaniikka I. s. 75-90. ISBN 951-758-086-X

Kujala, K. 1991. Factors affecting frost susceptibility and heaving pressure in soils. Oulu. 99 s. + 5 liitettä. (Acta Universitatis Ouluensis, C 58). ISBN 951-42-3243-7

Leppävuori, E. 1973. Jään fysikaaliset ominaisuudet. Helsingin Teknillinen Korkeakoulu, Rakennetekniikan laitos, julkaisu 6, 55 s. ISBN 951-750-166-8.



Malvern, L. E. 1969. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice Hall. 713 s.

Maugin, G. 1992. The Thermomechanics of Plasticity and Fracture. Cambridge University Press. 350 s. ISBN 0-521-39780-4

Mitchell, J. 1976. Fundamentals of Soil behaviour. New York. 442s.

Ozawa, H. & Kinosita, S. 1989. Segregated Ice Growth on a Microporous Filter. Journal of Colloid and Interface Science, vol. 132, no 1, s. 113-124.

Penner, E. 1986. Aspects of ice lens growth in soils. Cold Regions Science and Technology, vol 13, s. 91-100.

Salonen, E-M. 1987. Mekaniikan käsitteitä ja kaavoja. Helsingin Teknillinen Korkeakoulu, Tietotekniikan osasto, Mekanikaan laboratorio. (Opintomoniste n:o 6.)

Shen, M. & Ladanyi, B. 1987. Modelling of coupled heat, moisture and stress field in freezing. Cold Regions Science and Technology, vol 14 no 3, s. 237-246.

Sheng, D. & Knutsson, S. 1993. Sensitivity analysis of frost heave - A theoretical study. In: Frost in Geotechnical Engineering. Proceedings of the 2nd international symposium on frost in geotechnical engineering. 28 June-1 July 1993. Anchorage, USA. s. 3-16. ISBN 90-5410-319-1

Swalin, R. 1972. Thermodynamics of solids. The United States of America: John Wiley & Sons, Inc. 387 s. ISBN 0-471-83854-3

Takagi, S. 1979. Segregation freezing as the cause of suction force for ice lens formation. Engineering geology, vol 13 no 1-4, s. 93-100.

Takeda, K. & Nakano, Y. 1990. Quasi-steady problems in freezing soils: II. Experiment on the steady growth of an ice layer. Cold Regions Science and Technology, vol 24 no 3, s. 225-247.

Tsytoich, N. A. 1975. The mechanics of frozen ground. Washington, D.C.: Scripta Book Company. 426 s. ISBN 0-07-065410-7

Williams, P. J. 1967. Properties and behaviour of freezing soils. Norwegian Geotechnical Institution, Publication 72. 120 s.

Williams, P. J. & Smith, M. W. 1991. The frozen earth. Oxford: Cambridge University Press. 306 s. ISBN 0-521-42423-4

Yong, R. N. & Cheung, C. H. & Sheeran, D. E. 1979. Prediction of salt influence on unfrozen water content in frozen soils. Engineering geology, vol 13 no 1-4, s. 137-155.

Young, R. & Warkentin, B. 1975. Soil properties and behaviour. New York. 449 s.

Ziegler, H. 1983. An introduction to thermomechanics. Amsterdam: North-Holland publishing company 355 s. ISBN 0-444-86503-9

## 8 LIITTEET

1. Konveksinen funktio
2. Routimistehtävän numeerinen ratkaiseminen
3. Elementtimatriisin ja -vektorin muodostamiseksi laadittu Fortran-kielinen ohjelmalistaus
4. Lähtötiedoston listaus
5. Routanousukokeen koejärjestely
6. Erään ajanhetken (1h) tulostuksen listaus



## KONVEKSIINEN FUNKTIO

### 1 Määritelmä

Olkoon  $V$  lineaarinen avaruus ja  $\varphi$  sen funktio  $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , ts. funktio voi saada arvon  $+\infty$  (Maugin 1992). Funktion  $\varphi$  sanotaan olevan konveksinen, jos ja jos vain

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda) \varphi(y), \quad (L1.1)$$

$$\forall x, y \in V, \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

(kuva L1.1).

### Indikaattorifunktio

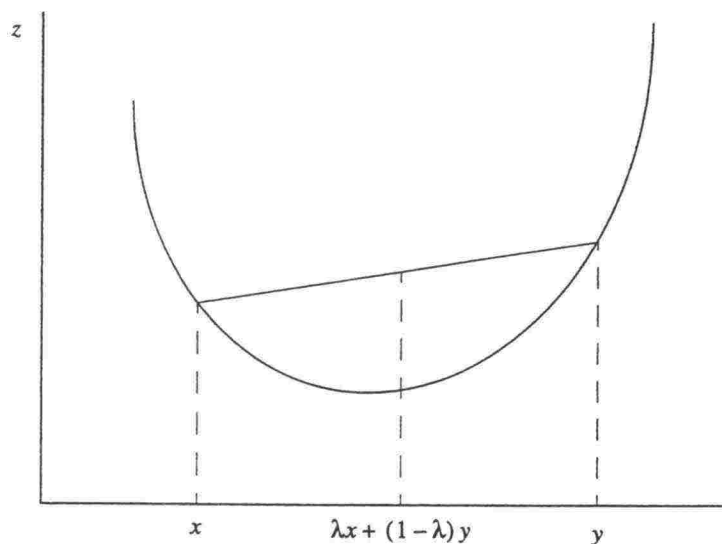
Olkoon  $C$   $V$ :n alijoukko. Indikaattorifunktion  $I_C$  määritelmä on

$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{jos } x \in C \\ +\infty & \text{jos } x \notin C \end{cases} \quad (L1.2)$$

Jos  $C$  on konveksinen joukko, niin  $I_C$  on konveksinen funktio:

jos  $x$  tai  $y \notin C$ , yhtälön (L1.1) oikea puoli saa arvon  $+\infty$  ja epäyhtälö on ilmeinen,

jos  $x$  ja  $y \in C$ , niin  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$  jos  $\lambda \in [0, 1]$  ja yhtälön (L1.1) molemmat puolet häviävät.



Kuva L1.1: Konveksinen funktio.

## 2 Subdifferentiaali

Olkoon  $V^*$   $V$ :n duaalinen avaruus ja  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^*, V}$  duaalinen sisäinen tulo. Sitten sanotaan, että  $x^* \in V^*$  on funktion  $\varphi$  subgradientti pisteessä  $x$ , jos (kuva L1.1) ja vain jos

$$\forall y \in V, \quad \varphi(y) - \varphi(x) \geq \langle x^*, y - x \rangle_{V^*, V}. \quad (\text{L1.3})$$

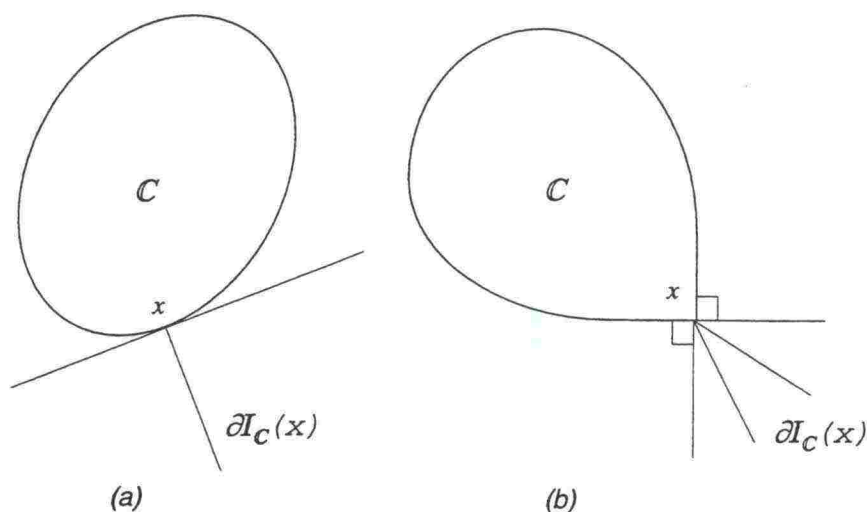
Funktion  $\varphi$  subdifferentiaali  $\partial\varphi(x)$  on siten kaikkien subgradienttien  $x^*$  joukko pisteessä  $x$ :

$$\partial\varphi(x) = \{x^*\}. \quad (\text{L1.4})$$

### Indikaattorifunktion subdifferentiaali

Indikaattorifunktion (L1.2) subdifferentiaali on (kuva L1.2)

$$\partial I(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{jos } x \notin C, \\ C\text{:n ulkoisten normaalien joukko,} & \\ & \text{jos } x \text{ on } C\text{:n reunalla} \\ \{0\} & \text{jos } x \text{ on } C\text{:n sisällä.} \end{cases} \quad (\text{L1.5})$$

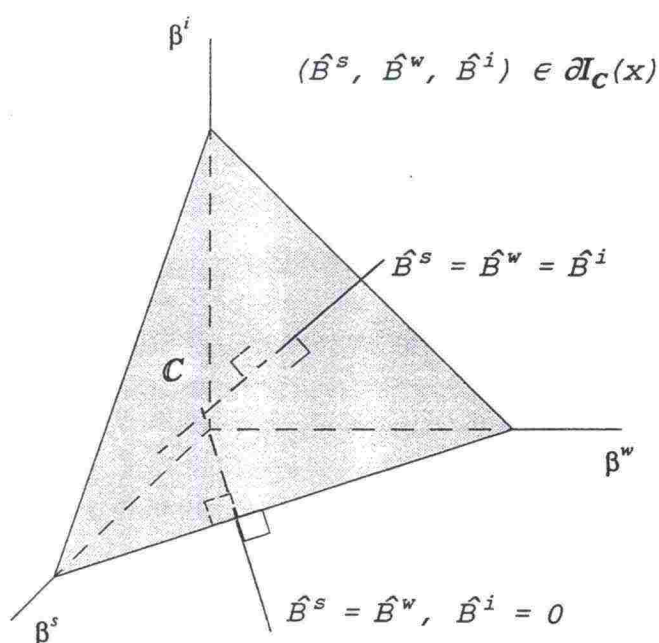


Kuva L1.2: Indikaattorifunktion subdifferentiaali. (a)  $C$  on säännöllinen. (b)  $C$  on epäsäännöllinen.

Edellisen erikoistapauksena voidaan pitää konveksisen joukon

$$C = \left\{ (\beta^s, \beta^w, \beta^i) \in \mathbb{R}^3 \mid \beta^s + \beta^w + \beta^i = 1, \right. \\ \left. \beta^s \geq 0, \beta^w \geq 0, \beta^i \geq 0 \right\} \quad (L1.6)$$

määrittelemää indikaattorifunktiota. Tällöin subdifferentiaali on kuvan L1.3 tasoa vastaan kohtisuorien normaalien eli subgradienttien joukko:  $(\hat{\beta}^s, \hat{\beta}^w, \hat{\beta}^i) \in \partial I_C(\beta^s, \beta^w, \beta^i)$ .



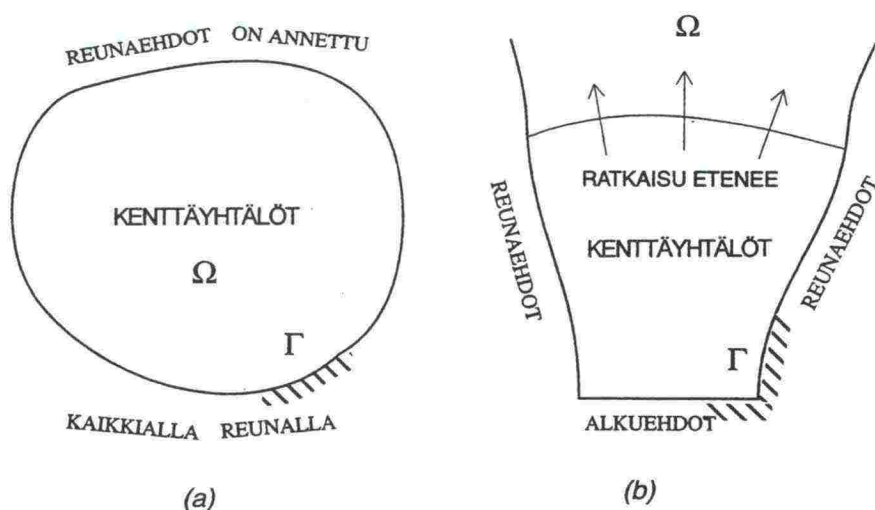
Kuva L1.3: Seoskontinuumin indikaattorifunktion määrittelyalue ja subgradientit.



## ROUTIMISTEHTÄVÄN NUMEERINEN RATKAISEMINEN

### 1 Johdanto

Routimistehtävä on yhdistetty reuna-arvo- ja etenemistehtävä, josta edelleen käytetään nimitystä alkuarvo-reuna-arvotehtävä. Tehtävätyyppien luonnetta kuvataan symbolisesti kuvassa 1.



Kuva 1: (a) Reuna-arvotehtävä. (b) Etenemistehtävä.

Routimistehtävä on kenttäprobleema, johon liittyvät kenttäyhtälöt ovat elliptisiä ja parabolisia osittaisdifferentiaaliyhtälöitä suljetuin tai avoimin reunaehdoin, ja sen ratkaisualue on paikka-aika-avaruudessa. Kenttäprobleema käsittää alueessa  $\Omega$  vallitsevat epälineaariset differentiaaliyhtälöt

$$\{A(\{\phi\})\} = \{0\} \quad \Omega \quad (\text{L2.1})$$

ja sen reunalla  $\Gamma$  reunaehdot

$$\{B(\{\phi\})\} = \{0\} \quad \Gamma. \quad (\text{L2.2})$$

Kenttäprobleema ratkaistaan elementtimenetelmällä, jota sovelletaan seuraavasti:

- (1) Määritellään kenttäprobleema ja ratkaisualue.
- (2) Muodostetaan kenttäprobleeman heikko muoto jäännös menetelmällä.
- (3) Linearisoidaan heikko muoto Newton-Raphsonin menetelmällä.
- (4) Diskretoidaan linearisoitu heikko muoto Galerkinin keinolla.
- (5) Valitaan sopivat muotofunktiot ja muodostetaan elementtikohtainen diskreetti yhtälöryhmä.

## 2 Elementtimenetelmä routimistehtävän ratkaisemisessa

### 2.1 Kenttäprobleema

Kirjoitetaan tarkasteltava routimistehtävä yleiseen muotoon

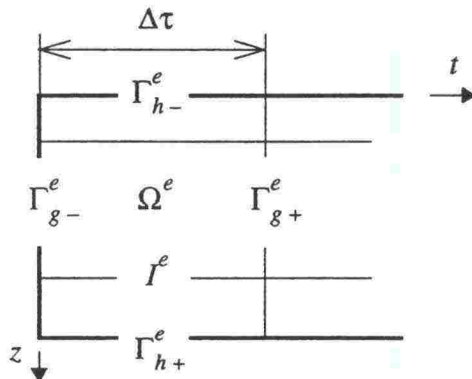
$$\begin{aligned} (-[k]\{\phi\}_{,z})_{,z} + [u_t]\{\phi\}_{,t} + [v_z]\{\phi\}_{,z} - \{Q\} &= \{0\} \quad \Omega^e, \\ v_z \llbracket -[k]\{\phi\}_{,z} \rrbracket &= 0 \quad I^e, \\ v_z(-[k]\{\phi\}_{,z}) - \{h\} &= 0 \quad \Gamma_h^e, \\ \{\phi\} - \{g\} &= 0 \quad \Gamma_{g-}^e, \end{aligned} \quad (L2.3)$$

missä

$$[\gamma] = [\gamma(\{\phi\})], \quad \gamma \in \{k, u_t, v_z\}, \quad \{Q\} = \{Q(\{\phi\})\}. \quad (L2.4)$$

Pystyvektori  $\{\phi\}$  koostuu tuntemattomista funktioista, joita ovat ainakin lämpötila  $T$ , huokoisuus  $n$ , huokospaine  $h$  ja raerungon siirtymävektori  $u_z$ , lisäksi tuntemattomiksi funktioiksi voidaan valita esimerkiksi virtaamanopeus  $\beta^w V_z^w$  ja raerungon siirtymänopeus  $U_z^s$ , jotka antavat lisäinformaatiota itse routimisilmiöstä ja käytetyn elementtimenetelmän toimivuudesta. Kenttäyhtälöt (L2.3) ovat epälineaariset riippuvuuksien (L2.4) mukaisesti, ja lähdetermiin  $\{Q\}$  on sisällytetty kaikki funktioiden  $\{\phi\}$  nollatta kertalukua olevat termit.

Ratkaisualue sijaitsee paikka-aika-avaruudessa, ja se käsittää  $\Delta\tau$ :n levyisen aikaviipaleen, joka on jaettu pystysuunnassa elementteihin  $\Omega^e$  (kuva 2). Kuvassa 2 on paksulla viivalla merkitty ne reunat, joilla voidaan antaa tuntemattomia funktioita koskevia ehtoja. Alkuehto (L2.3)<sub>4</sub> annetaan nyt Dirichlet-tyyppisenä reunaehtona reunalla  $\Gamma_{g-}^e$ . Vastaavasti reunalla  $\Gamma_h^e$  voidaan antaa joko Dirichlet'n tai Neumannin reunaehto. Hyppyehtojen (L2.3)<sub>2</sub> toteutuminen merkitsee sitä, että funktioiden normaaliderivaatat ovat jatkuvia siirryttäessä elementistä toiseen.



Kuva 2: Ratkaisualue.

## 2.2 Heikko muoto

Kenttäprobleemaa (L2.3) vastaava heikko muoto muodostetaan ns. jäännös-menetelmällä. Heikko muoto saadaan kertomalla vallitsevat yhtälöt mielivaltaisilla painofunktioilla, integroimalla syntyneet lausekkeet omien ratkaisualueitensa yli ja laskemalla näin saadut yhtälöt yhteen. Siten saadaan elementteittäin integroitu muoto

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega^e} \{W\}^T \left( -[k] \{\phi\}_{,z},_z + [u_t] \{\phi\}_{,t} + [v_z] \{\phi\}_{,z} - \{Q\} \right) d\Omega + \\ & + \sum_e \int_{\Gamma_h^e} \{\hat{W}^h\}^T \left[ v_z (-[k] \{\phi\}_{,z}) - \{h\} \right] d\Gamma + \\ & + \sum_e \int_{\Gamma_g^e} \{\hat{W}^g\}^T (\{\phi\} - \{g\}) d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (L2.5)$$

Hyppyehto (L2.3)<sub>2</sub> toteutetaan etukäteen, jolloin sen osuus jää pois heikosta muodosta.

Lausekkeesta (L2.5) havaitaan, että alustavassa heikossa muodossa esiintyy funktioiden toisen kertaluvun derivaattoja, mikä tekee käsittelyn kömpelöksi, koska suppenevuuden takaamiseksi funktioiden approksimaatioiden täytyy olla ns. C<sup>1</sup>-jatkuvia. Formulaatio saadaan käyttökelpoisemmaksi osittaisintegroinnilla, jota *Salonen (1990)* pitää elementtimenetelmässä "elämän ja kuoleman kysymyksenä".

Soveltamalla osittaisintegrointikaavaa (*Salonen 1990*)

$$\int_{\Omega} g \frac{\partial h}{\partial x_a} d\Omega = \int_{\Gamma} v_a g h d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x_a} h d\Omega \quad (L2.6)$$

lauseke (L2.5) saa muodon

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega^e} \left( \{W\}_{,z}^T [k] \{\phi\}_{,z} + \{W\}^T [u_t] \{\phi\}_{,t} + \{W\}^T [v_z] \{\phi\}_{,z} - \{W\}^T \{Q\} \right) d\Omega + \\ & + \sum_e \int_{\Gamma_h^e} \{\hat{W}^h\}^T \left[ v_z (-[k] \{\phi\}_{,z}) - \{h\} \right] d\Gamma + \sum_e \int_{\Gamma_h^e} \{W\}^T v_z (-[k] \{\phi\}_{,z}) d\Gamma + \\ & + \sum_e \int_{\Gamma_g^e} \{\hat{W}^g\}^T (\{\phi\} - \{g\}) d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (L2.7)$$



Koska painofunktiot ovat mielivaltaisia, voidaan valita

$$\{\hat{w}^h\}^T = -\{w\}^T \quad \Gamma_h^e \quad (\text{L2.8})$$

Tällöin yhtälö (L2.7) yksinkertaistuu muotoon

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega^e} \left( \{w\}_{,z}^T [k] \{\phi\}_{,z} + \{w\}^T [u_t] \{\phi\}_{,t} + \{w\}^T [v_z] \{\phi\}_{,z} - \{w\}^T \{Q\} \right) d\Omega + \\ & + \sum_e \int_{\Gamma_h^e} \{\hat{w}^h\}^T \{h\} d\Gamma + \\ & + \sum_e \int_{\Gamma_g^e} \{\hat{w}^g\}^T (\{\phi\} - \{g\}) d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (\text{L2.9})$$

jossa on enää korkeintaan ensimmäisen asteen derivaattoja.

Seuraavaksi muokataan yhtälön (L2.9) aikaderivaatan sisältävää termiä. Sovelletaan jälleen osittaisintegroitukaavaa (L2.6), mikä antaa muodon

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega^e} \left[ \{w\}_{,z}^T [k] \{\phi\}_{,z} + \left( \{w\}^T [u_t] \right)_{,t} \{\phi\} + \{w\}^T [v_z] \{\phi\}_{,z} - \{w\}^T \{Q\} \right] d\Omega + \\ & + \sum_e \int_{\Gamma_h^e} \{\hat{w}^h\}^T \{h\} d\Gamma + \\ & + \sum_e \int_{\Gamma_g^e} \{\hat{w}^g\}^T (\{\phi\} - \{g\}) d\Gamma + \sum_e \int_{\Gamma_g^e} v_t \{w\}^T [u_t] \{\phi\} d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (\text{L2.10})$$

Tehdään valinta

$$\{\hat{w}^g\}^T = \{w\}^T [u_t] \quad \Gamma_g^e, \quad (\text{L2.11})$$

jolloin yhtälö (L2.10) saadaan muotoon

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega^e} \left[ \{w\}_{,z}^T [k] \{\phi\}_{,z} + \left( \{w\}^T [u_t] \right)_{,t} \{\phi\} + \{w\}^T [v_z] \{\phi\}_{,z} - \{w\}^T \{Q\} \right] d\Omega + \\ & + \sum_e \int_{\Gamma_h^e} \{\hat{w}^h\}^T \{h\} d\Gamma + \\ & - \sum_e \int_{\Gamma_g^e} \{w\}^T [u_t] \{g\} d\Gamma + \sum_e \int_{\Gamma_g^e} \{w\}^T [u_t] \{\phi\} d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (\text{L2.12})$$

Osittaisintegroimalla aikatermi uudelleen päädytään lausekkeeseen

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega^e} \left( \{W\}_{,z}^T [k] \{\phi\}_{,z} + \{W\}^T [u_t] \{\phi\}_{,t} + \{W\}^T [v_z] \{\phi\}_{,z} - \{W\}^T \{Q\} \right) d\Omega + \\ & + \sum_e \int_{\Gamma_h^e} \{\hat{W}^h\}^T \{h\} d\Gamma + \\ & + \sum_e \int_{\Gamma_g^e} \{W\}^T [u_t] (\{\phi\} - \{g\}) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (L2.13)$$

Tämä on yhtälösystemiä (L2.3) vastaava heikko muoto, missä ei vielä ole tehty oletuksia funktioiden approksimaatioista. Salonen (1990) on käsitellyt yksityiskohtaisemmin painofunktioiden valintaan liittyviä piirteitä. Koska reunaehdot (L2.3)<sub>3</sub> ja (L2.3)<sub>4</sub> sisältyvät heikkoon muotoon, niitä nimitetään ns. heikoiksi reunaehdoiksi. Jos reunalla  $\Gamma_h^e$  annettaisiin reunaehtojen (L2.3)<sub>2</sub> sijasta Dirichlet -tyyppiset reunaehdot, olisivat ne ns. vahvoja reunaehtoja. Tällöin niitä ei sisällytettäisi heikkoon muotoon, vaan ne toteutettaisiin etukäteen.

## 2.3 Linearisointi Newton-Raphsonin menetelmällä

Merkitään yhtälöä (L2.13) symbolisesti funktiona

$$R(\{\phi\}, \{\phi\}_{,z}, \{\phi\}_{,t}) = 0. \quad (L2.14)$$

Kehitetään funktio R katkaistuksi Taylorin sarjaksi:

$$R \approx \underline{R} + \frac{\partial R}{\partial \{\phi\}} \Delta\{\phi\} + \frac{\partial R}{\partial \{\phi\}_{,z}} \Delta\{\phi\}_{,z} + \frac{\partial R}{\partial \{\phi\}_{,t}} \Delta\{\phi\}_{,t} = 0, \quad (L2.15)$$

missä alleviivaus viittaa tunnettuihin, tietyn referenssitason arvoihin. Näin on saatu lineaarinen yhtälöryhmä, jonka ratkaisuna saadaan funktioiden muutokset. Tämän jälkeen lasketaan funktioiden uudet, tarkennetut arvot

$$\{\phi\} = \underline{\{\phi\}} + \Delta\{\phi\}, \quad (L2.16)$$

joilla referenssitaso päivitetään uudelleen. Iterointia jatketaan, kunnes virhe tietyn normin mielessä alittaa sopivan rajan, mikä käytännössä merkitsee sitä, että funktioiden muutokset lähestyvät nollaa.

Kirjoitetaan vielä linearisoidun heikon muodon lauseke:

$$\begin{aligned}
 & \sum_e \int_{\Omega^e} \left[ \{W\}^T \left( [K] \{\phi\}_{,z} + \{\phi\}_{,z} \frac{\partial [K]}{\partial \{\phi\}} \Delta \{\phi\} + [K] \Delta \{\phi\}_{,z} \right) + \right. \\
 & \quad + \{W\}^T \left( [u_r] \{\phi\}_{,r} + \{\phi\}_{,r} \frac{\partial [u_r]}{\partial \{\phi\}} \Delta \{\phi\} + [u_r] \Delta \{\phi\}_{,r} \right) + \\
 & \quad + \{W\}^T \left( [v_z] \{\phi\}_{,z} + \{\phi\}_{,z} \frac{\partial [v_z]}{\partial \{\phi\}} \Delta \{\phi\} + [v_z] \Delta \{\phi\}_{,z} \right) + \\
 & \quad \left. - \{W\}^T \left( \{Q\} + \frac{\partial \{Q\}}{\partial \{\phi\}} \Delta \{\phi\} \right) \right] d\Omega + \\
 & + \sum_e \int_{\Gamma_h^e} \{W\}^T \{h\} d\Gamma + \\
 & + \sum_e \int_{\Gamma_{g^-}^e} \{W\}^T \left\{ [u_r] (\{\phi\} - \{g\}) + \left( (\{\phi\} - \{g\}) \frac{\partial [u_r]}{\partial \{\phi\}} + [u_r] \right) \Delta \{\phi\} \right\} d\Gamma = 0.
 \end{aligned} \tag{L2.17}$$

## 2.4 Diskretointi Galerkinin keinolla

Diskretoidaan heikko muoto (L2.17) käyttämällä tuntemattomille funktioille  $\{\phi\}$  approksimaatioita

$$\{\phi\} \approx \{\tilde{\phi}(z)\} = [N(z)] \{a\}, \tag{L2.18}$$

jossa  $\{a\}$  on vapausasteista koostuva pystyvektori. Approksimaatio (L2.18) on ajan suhteen vakio. Painofunktiot valitaan Galerkinin keinolla, mikä tarkoittaa, että painofunktiot otetaan tuntemattomien funktioiden approksimoinnissa käytetyistä muotofunktioista:

$$\{W\}_i = \{N(z)\}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{L2.19}$$

missä alaindeksi  $i$  viittaa tiettyyn vapausasteeseen. Korostettakoon, että approksimaatiot (L2.18) ja (L2.19) ovat elementtikohtaisia ja vapausasteet  $\{a\}$  viittaavat tiettyyn elementtiin.

Diskretointi muuntaa jatkuvan systeemin (L2.17) vapausasteiden lukumäärää  $n$  vastaaviksi yhtälöiksi

$$\sum_e F(\{a\})_i^e = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{eli} \tag{L2.20}$$

$$\sum_e \{F(\{a\})\}^e = \{0\}.$$



Sijoittamalla approksimaatiot (L2.18) ja (L2.19) heikkoon muotoon (L2.17) ja integroimalla aikaviipaleen  $\Delta\tau$  yli saadaan yhtälöryhmä

$$\sum_e \{F\}^e = \sum_e \left( [K]^e \Delta\{a\}^e + \{P\}^e \right) = \{0\}, \quad (\text{L2.21})$$

jossa elementtimatriisi on muotoa

$$\begin{aligned} [K]^e = \int_{\Gamma_g^e} & \left\{ [B]^T \left( [B] \{a\} \frac{\partial [k]}{\partial \{\phi\}} [N] + [k] [B] \right) + \right. \\ & + [N]^T \frac{1}{\Delta\tau} \left( ([N] \{a\} - \{g\}) \frac{\partial [u_t]}{\partial \{\phi\}} + [u_r] \right) [N] + \\ & + [N]^T \left( [B] \{a\} \frac{\partial [v_z]}{\partial \{\phi\}} [N] + [v_z] [B] \right) + \\ & \left. - [N]^T \frac{\partial \{Q\}}{\partial \{\phi\}} [N] \right\} dz \end{aligned} \quad (\text{L2.22})$$

ja elementtivektori muotoa

$$\begin{aligned} \{P\}^e = \int_{\Gamma_g^e} & \left\{ [B]^T [k] [B] \{a\} + [N]^T \frac{1}{\Delta\tau} [u_r] ([N] \{a\} - \{g\}) + \right. \\ & \left. + [N]^T [v_z] [B] - [N]^T \{Q\} \right\} dz + \left( [N]^T \{h\} \right)_{\Gamma_h^e}. \end{aligned} \quad (\text{L2.23})$$

Edellä on käytetty merkintää

$$[B] = [N]_{,z}. \quad (\text{L2.24})$$

Vertaamalla lausekkeita (L2.22), (L2.23) ja (L2.17) keskenään havaitaan, että alkujaan kaksiulotteisen tapauksen tarkastelu on palautunut yksiulotteiseksi ja jäljellä on enää integrointi paikan suhteen. Tällaista menetelmää kutsutaan epäjatkuvaksi Galerkinin keinoksi (Johnson 1987, Freund 1990). Kun nyt käytetään vakioapproksimaatiota ajan suhteen, probleeman käsittely johtaa tulokseen, joka vastaa differenssimenetelmän implisiittistä Euleria. Korkeamman asteen approksimaatioiden käytöstä epäjatkuvan Galerkinin keinon yhteydessä on esittänyt esimerkiksi Freund (1990).

## 2.5 Routimistehtävän diskreetit yhtälöt

Yksiulotteisen routimistehtävän yhtälösystemi muodostavat yhtälöt (5.4) ja niitä täydentävät konstitutiiviset yhteydet (5.5) sekä reunaehdot (5.6) ja alkuehdot (5.2). Tuntemattomia perusfunktioita ovat lämpötila  $T$ , huokoisuus  $n$ , huokospaine  $h$  ja raerungon siirtymävektori  $u_z$ . Näiden lisäksi valitaan

tuntemattomiksi funktioiksi vielä virtausnopeus  $\beta^w V_z^w$ , raerungon siirtymänopeus  $U_z^s$  ja funktio  $\tilde{f}$ , ja pystyvektori  $\{\phi\}$  kirjoitetaan muotoon

$$\{\phi\} = \begin{bmatrix} T & \tilde{f} & h & \beta^w V_z^w & u_z & U_z^s & n \end{bmatrix}^T \quad (L2.25)$$

Vastavat yhtälöt ovat tällöin energiayhtälö (5.4)<sub>4</sub>, funktion  $\tilde{f}$  konstitutiivinen yhtälö (4.5), huokosveden jatkuvuusyhtälö (5.4)<sub>2</sub>, Darcyn yhtälö (5.4)<sub>6</sub>, jäätyvän maan tasapainoyhtälö (5.4)<sub>3</sub>, raerungon siirtymänopeuden konstitutiivinen yhteys  $U_z^s = u_{z,0}$  ja huokoisuuden jatkuvuusyhtälö (5.4)<sub>1</sub>.

Funktion  $\tilde{f}$  valinta tuntemattomaksi funktioksi helpottaa yhtälöiden käsittelyä. Valinta on sopiva, sillä funktio  $\tilde{f}$  ja sen gradientti ovat jatkuvia kaikkialla. Sitä vastoin huokosveden suhteellista osuutta  $\chi$  ei valita varsinaiseksi tuntemattomaksi, koska se ei ole riittävän sileä - sen gradientti routarajalla on epäjatkua. Funktion  $\chi$  suhteen menetellään seuraavasti:  $\chi$ :ta pidetään heikon muodon muodostamisen ajan tuntemattomana termeissä, jotka sisältävät sen aikaderivaatan; kun tehtävää aletaan linearisoida, palautetaan  $\chi$ :lle sen alkuperäinen merkitys, jolloin se on lämpötilasta ja paineesta riippuva funktio.

Tarkastelussa käytetään yhtä elementtiverkkoa ja kaksisolmuisia lineaarisia janaelementtejä. Jokaisella tuntemattomalla funktiolla on kussakin solmupisteessä yksi vapausaste, ja niiden approksimoinissa käytetään yhtä muotofunktio-tyyppejä. Lineaariset, lokaaliset muotofunktiot ovat muotoa

$$N_i^e = \frac{1}{2} (1 + m_i \xi) , \quad \xi = \frac{z}{b} , \quad (L2.26)$$

$$m_1 = -1, \quad m_2 = 1, \quad \xi \in [-1, 1] ,$$

missä symboli  $b$  on elementin pituus jaettuna kahdella. Siten approksimaation (L2.18) muotofunktio- matriisiin kooksi tulee  $7 \times 14$  ja se on muodoltaan nauhamainen:

$$[N] = \begin{bmatrix} \{N\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{N\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{N\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{N\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{N\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{N\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{N\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{N\}^T \end{bmatrix} . \quad (L2.27)$$

Vastaavasti matriisi  $[B]$  saa modon

$$[B] = [N]_{,\xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} . \quad (L2.28)$$

Vapausastepystyvektori on kokoa 14x1, ja se voidaan kirjoittaa symbolisesti muotoon

$$\{a\} = \left[ \{T\} \{f\} \{h\} \{v\} \{u\} \{U\} \{n\} \right]^T. \quad (L2.29)$$

Käyttämällä edellä lueteltuja yhtälöitä ja esitettyjä tuntemattomien funktioiden approksimaatioita saadaan elementtimatriisi (L2.22) muotoon

$$[K]^e = \begin{bmatrix} [K^{TT}] [0] [0] [K^{TV}] [0] [0] [K^{Tn}] \\ [K^{fT}] [K^{ff}] [0] [0] [0] [0] [0] \\ [K^{hT}] [K^{hf}] [K^{hh}] [0] [0] [0] [K^{hn}] \\ [K^{vT}] [K^{vf}] [K^{vh}] [K^{vv}] [0] [0] [0] \\ [K^{uT}] [K^{uf}] [K^{uh}] [0] [K^{uu}] [0] [K^{un}] \\ [0] [0] [0] [0] [K^{vu}] [K^{vu}] [0] \\ [0] [0] [0] [0] [0] [K^{nu}] [K^{nn}] \end{bmatrix} \quad (L2.30)$$

ja elementtivektori (L2.23) muotoon

$$\{F\}^e = \left[ \{F^T\} \{F^f\} \{F^h\} \{F^v\} \{F^u\} \{F^U\} \{F^n\} \right]^T. \quad (L2.31)$$

Elementtimatriisin ja -vektorin yhtälökohtaiset osuudet ovat seuraavat:

### Energiayhtälö

$$\begin{aligned} [K^{TT}] = & b \int_{-1}^{+1} \left\{ \{B\} \left( \{B\}^T \{T\} \frac{\partial \kappa}{\partial T} \{N\}^T + \kappa \{B\}^T \right) + \right. \\ & + \{N\} \frac{1}{\Delta \tau} \left[ \left( \{N\}^T \{T\} - \bar{T} \right) \frac{\partial c}{\partial T} + c \right] \{N\}^T + \\ & + \{N\} \rho^w C^w \{N\}^T \{V\} \{B\}^T + \\ & \left. + \{N\} \frac{1}{\Delta \tau} \rho^i \frac{\ell}{T_0} \{N\}^T \{n\} \left( \{N\}^T \{T\} \frac{\partial \chi}{\partial T} + \chi - \bar{\chi} \right) \{N\}^T \right\} d\xi, \end{aligned} \quad (L2.32)$$

$$[K^{TV}] = b \int_{-1}^{+1} \left( \{N\} \rho^w C^w \{B\}^T \{T\} \{N\}^T \right) d\xi, \quad (L2.33)$$

$$[K^{Tn}] = b \int_{-1}^{+1} \left\{ \left[ \{B\} \{B\}^T \{T\} \frac{\partial \kappa}{\partial n} \{N\}^T + \{N\} \frac{1}{\Delta \tau} (\{N\}^T \{T\} - \bar{T}) \frac{\partial c}{\partial n} \right. \right. \\ \left. \left. + \{N\} \frac{1}{\Delta \tau} \rho^i \frac{\ell}{T_0} \{N\}^T \{T\} (\chi - \bar{\chi}) \right] \{N\}^T \right\} d\xi, \quad (L2.34)$$

$$\{F^T\} = b \int_{-1}^{+1} \left\{ \{B\} \kappa \{B\}^T \{T\} + \{N\} \frac{1}{\Delta \tau} c (\{N\}^T \{T\} - \bar{T}) + \right. \\ \left. + \{N\} \rho^w C^w \{N\}^T \{V\} \{B\}^T \{T\} + \right. \\ \left. + \{N\} \frac{1}{\Delta \tau} \rho^i \frac{\ell}{T_0} \{N\}^T \{T\} \{N\}^T \{n\} (\chi - \bar{\chi}) \right\} d\xi. \quad (L2.35)$$

### Funktio $\tilde{f}$

$$[K^{fT}] = b \int_{-1}^{+1} \left( \{N\} 2a \frac{1-\chi}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial T} \{N\}^T \right) d\xi, \quad (L2.36)$$

$$[K^{ff}] = b \int_{-1}^{+1} (\{N\} \{N\}^T) d\xi, \quad (L2.37)$$

$$\{F^f\} = b \int_{-1}^{+1} \left[ \{N\} \{N\}^T \{f\} - \{N\} a \frac{(1-\chi)^2}{\chi} \right] d\xi. \quad (L2.38)$$

### Huokosveden jatkuvuusyhtälö

$$[K^{hT}] = b \int_{-1}^{+1} \left\{ \{N\} \frac{1}{\Delta \tau} \left[ (\{N\}^T \{h\} - \bar{h}) \frac{\partial \kappa^e}{\partial T} + \left( 1 - \frac{\rho^i}{\rho^w} \right) \{N\}^T \{n\} \frac{\partial \chi}{\partial T} \right] \{N\}^T + \right. \\ \left. + \{N\} \frac{2}{\Delta \tau} \rho^w \frac{\ell}{T_0} \left[ \frac{\partial \kappa^e}{\partial T} (2\{N\}^T \{T\} \{N\}^T \{f\} - \{N\}^T \{T\} \bar{f} - \{N\}^T \{f\} \bar{T}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa^e (2\{N\}^T \{f\} - \bar{f}) \right] \{N\}^T + \{B\} \rho^w \frac{\ell}{T_0} \frac{k}{\rho^w g} \{B\}^T \{f\} \{N\}^T \right\} d\xi, \quad (L2.39)$$



$$[K^{hf}] = b \int_{-1}^{+1} \rho^w \frac{\ell}{T_0} \left[ \{B\} \frac{k}{\rho^w g} \{N\}^T \{T\} \{B\}^T + \right. \\ \left. + \{N\} \frac{2}{\Delta \tau} \kappa^e (2 \{N\}^T \{f\} - \bar{f}) \{N\}^T \right] d\xi, \quad (L2.40)$$

$$[K^{hh}] = b \int_{-1}^{+1} \left( \{B\} \frac{k}{\rho^w g} \{B\}^T + \{N\} \frac{1}{\Delta \tau} \kappa^e \{N\}^T \right) d\xi, \quad (L2.41)$$

$$[K^{hn}] = b \int_{-1}^{+1} \left[ \{N\} \frac{1}{\Delta \tau} \left( 1 - \frac{\rho^i}{\rho^w} \right) (\chi - \bar{\chi}) \{N\}^T \right] d\xi, \quad (L2.42)$$

$$\{F^h\} = b \int_{-1}^{+1} \left[ \{B\} \frac{k}{\rho^w g} \{B\}^T \{h\} + \{N\} \frac{1}{\Delta \tau} \kappa^e (\{N\}^T \{h\} - \bar{h}) + \right. \\ + \{B\} \frac{k}{\rho^w g} \rho^w \frac{\ell}{T_0} \{N\}^T \{T\} \{B\}^T \{f\} + \\ + \{N\} \frac{2}{\Delta \tau} \kappa^e \rho^w \frac{\ell}{T_0} (\{N\}^T \{f\} - \bar{f}) \{N\}^T \{T\} + \\ + \{N\} \frac{2}{\Delta \tau} \kappa^e \rho^w \frac{\ell}{T_0} (\{N\}^T \{T\} - \bar{T}) \{N\}^T \{f\} + \\ \left. + \{N\} \frac{1}{\Delta \tau} \left( 1 - \frac{\rho^i}{\rho^w} \right) (\chi - \bar{\chi}) \{N\}^T \{n\} \right] d\xi. \quad (L2.43)$$

### Darcyn yhtälö

$$[K^{vt}] = b \int_{-1}^{+1} \left( \{N\} \frac{k}{\rho^w g} \rho^w \frac{\ell}{T_0} \{B\}^T \{f\} \{N\}^T \right) d\xi, \quad (L2.44)$$

$$[K^{vf}] = b \int_{-1}^{+1} \left( \{N\} \frac{k}{\rho^w g} \rho^w \frac{\ell}{T_0} \{N\}^T \{T\} \{B\}^T \right) d\xi, \quad (L2.45)$$

$$[K^{vh}] = b \int_{-1}^{+1} \left( \{N\} \frac{k}{\rho^w g} \{B\}^T \right) d\xi, \quad (L2.46)$$

$$[K^{vv}] = b \int_{-1}^{+1} \left( \{N\} \{N\}^T \right) d\xi, \quad (L2.47)$$

$$\begin{aligned} \{F^v\} = b \int_{-1}^{+1} & \left[ \{N\} \{N\}^T \{V\} + \right. \\ & \left. + \{N\} \frac{k}{\rho^w g} \left( \{B\}^T \{h\} + \rho^w \frac{\ell}{T_0} \{N\}^T \{T\} \{B\}^T \{f\} \right) \right] d\xi. \end{aligned} \quad (L2.48)$$

### Jäätyvän maan tasapainoyhtälö

$$\begin{aligned} [K^{uT}] = b \int_{-1}^{+1} & \left[ \{B\} \left( \{B\}^T \{u\} \frac{\partial M}{\partial T} - 2\rho^w \frac{\ell}{T_0} \{N\}^T \{f\} \right) \{N\}^T + \right. \\ & \left. - \{N\} \frac{\partial \gamma_z^*}{\partial T} \{N\}^T \right] d\xi, \end{aligned} \quad (L2.49)$$

$$[K^{uf}] = b \int_{-1}^{+1} \left( -\{B\} 2\rho^w \frac{\ell}{T_0} \{N\}^T \{T\} \{N\}^T \right) d\xi, \quad (L2.50)$$

$$[K^{uh}] = b \int_{-1}^{+1} \left( -\{N\} \{N\}^T \right) d\xi, \quad (L2.51)$$

$$[K^{uu}] = b \int_{-1}^{+1} \left( \{B\} M \{B\}^T \right) d\xi, \quad (L2.52)$$

$$[K^{un}] = b \int_{-1}^{+1} \left( \{B\} \{B\}^T \{u\} \frac{\partial M}{\partial n} \{N\}^T - \{N\} \frac{\partial \gamma_z^*}{\partial n} \{N\}^T \right) d\xi, \quad (L2.53)$$

$$\begin{aligned} \{F^u\} = b \int_{-1}^{+1} & \left[ \{B\} \underline{M} \{B\}^T \{u\} - \{B\} \left( \{N\}^T \{h\} + 2\rho^w \frac{\ell}{T_0} \{N\}^T \{f\} \right) + \right. \\ & \left. - \{N\} \gamma_z^* \right] d\xi + \left( \{N\} h \right)_{\Gamma_h^e}. \end{aligned} \quad (L2.54)$$

### Raerungon siirtymänopeus

$$[K^{uu}] = b \int_{-1}^{+1} \left( -\{N\} \frac{1}{\Delta \tau} \{N\}^T \right) d\xi, \quad (L2.55)$$

$$[K^{uu}] = b \int_{-1}^{+1} \left( \{N\} \{N\}^T \right) d\xi, \quad (L2.56)$$

$$\{F^u\} = b \int_{-1}^{+1} \left[ \{N\} \{N\}^T \{u\} - \{N\} \frac{1}{\Delta \tau} \left( \{N\}^T \{u\} - \bar{u} \right) \right] d\xi. \quad (L2.57)$$

### Huokoisuuden jatkuvuusyhtälö

$$[K^{nu}] = b \int_{-1}^{+1} \left[ \{N\} \{B\}^T \{u\} \{N\}^T - \{N\} \left( 1 - \{N\}^T \{u\} \right) \{B\}^T \right] d\xi, \quad (L2.58)$$

$$[K^{nn}] = b \int_{-1}^{+1} \left[ \{N\} \left( \frac{1}{\Delta \tau} + \{B\}^T \{u\} \right) \{N\}^T + \{N\} \{N\}^T \{u\} \{B\}^T \right] d\xi, \quad (L2.59)$$

$$\{F^n\} = b \int_{-1}^{+1} \left[ \{N\} \frac{1}{\Delta \tau} (\{N\}^T \{n\} - \bar{n}) - \{N\} (1 - \{N\}^T \{n\}) \{B\}^T \{U\} + \right. \\ \left. + \{N\} \{N\}^T \{U\} \{B\}^T \{n\} \right] d\xi . \quad (L2.60)$$

## 2.6 Aika-askeleen valinta

Kontrolloimalla aika-askeelta voidaan menetelmän tehokkuutta parantaa. Aika-askele on mahdollista määrittää adaptiivisesti käyttäen ratkaisussa tapahtuvaa muutosta otettaessa aika-askele  $\Delta \tau$ . Eräs tapa valita aika-askele iteratiivisesti on antaa muutokselle alkuarvauksena annetun ala- ja ylärajan keskiarvo. Siten aika-askeleen korjauskaava voidaan kirjoittaa muotoon (Freund 1990)

$$\Delta \tau^{(uusi)} = \Delta \tau^{(vanha)} \frac{\alpha + \beta}{2 \|g - \phi(\tau)\|_{L_2}} ,$$

jossa  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat annetut ala- ja yläraja. Lisäksi täytyy valvoa, ettei aika-askele saa liian pieniä tai suuria arvoja.

## 3 Laskentaohjelma

Esimerkkilaskelmat tehtiin *Freundin* laatimalla ohjelmistolla, joka koostuu kolmesta osasta:

- (1) **Lähtötiedostossa** annetaan kaikki tarvittavat parametrit ratkaisualue  $e$  n elementtijaosta, vapausasteiden kiinnityksistä, reuna- ja alkuarvoista, materiaaliominaisuuksista sekä aika-askeleen vallinnasta ja iteroinnin suorittamisesta. Listaus lähtötiedostosta on esitetty liitteessä 4.
- (2) **Tulkki** kääntää lähtötiedoston pääohjelmalle.
- (3) **Pääohjelma** suorittaa varsinaisen laskennan.

Pääohjelma koostuu kolmesta osasta, ja se voidaan esittää symbolisesti (Freund 1990)

```
main[ ]
  read[input, data, ★]
  timeintegrate[echo, data, ★]
  write[output, data, ★]
end main .
```



Aikaintegrointiosa sisältää kaksi silmukkaa, joista ulommalla käydään läpi aika-askeleet ja sisemmällä elementit:

```
timeintegrate[echo, data, ★]
  for timestep
    for element
      collect[data, elementdata, ★]
      elementcontribution[elementdata, ke, fe, ★]
      update[ke, fe, kg, fg, ★]
    nex element
    solve[kg, fg, xg, ★]
    copy[xg, data, ★]
    write[echo, data, ★]
  next timestep
end timeintegrate
```

Merkinnät **ke**, **fe** viittaavat elementtimatriisiin ja -vektoriin ja **kg**, **fg** vastaaviin globaalsiin systeemi yhtälöihin. Ratkaisua on merkitty **xg**:llä. Elementtikohtaisten systeemi yhtälöiden muodostamiseksi tarvittava Fortran-kielinen aliohjelma on esitetty *liitteessä 3*.

C-----C  
C----- J. HARTIKAINEN -----C  
C-----C

```

SUBROUTINE ELEEX2 (LIPRX, NIPRX, MIPRX,
+                RRPRX, NRPRX, MRPRX,
+                LNODE, NNODE,
+                LTYPE, NTYPE,
+                RMATE, NMATE,
+                RPARE, NPARE, MPARE,
+                RFUNE, NFUNE, MFUNE,
+                LFIXE, NFIXE, MFIXE,
+                LLOCE, RVECE, RLODE, RSTEF, NDOFE,
+                ITASK)

```

```

*****
*
*   LIPRX   : PROCEDURE DATA           (IN)
*   RRPRX   : PROCEDURE DATA           (IN)
*   LNODE   : NODAL NUMBERS             (IN)
*   LTYPE   : TYPE PROPETIES            (IN)
*   RMATE   : MATERIAL PROPERTIES       (IN)
*   RPARE   : VALUES OF PARAMETERS     (IN)
*   RFUNE   : VALUES OF FUNCTIONS      (IN)
*   LLOCE   : ELEMENT DOF NUMBERING     (OUT)
*   RVECE   : ELEMENT DOF VALUES       (OUT)
*   RLODE   : ELEMENT VECTOR            (OUT)
*   RSTEF   : ELEMENT MATRIX            (OUT)
*   ITASK   : TASK
*
*   FILLTB  : TABLE FILL
*   MKMATE  : MAKE MATERIAL TABLE
*
*****

```

PARAMETER (MFUNN = 7, MNODE = 2, MSAMP = 2)

```

INTEGER LFIXE (NFIXE,MFIXE), LLOCE (NDOFE), LNODE (NNODE)
INTEGER LTYPE (NTYPE), LIPRX (NIPRX,MIPRX)
REAL    RMATE (NMATE), RPARE (NPARE,MPARE)
REAL    RFUNE (NFUNE,MFUNE)
REAL    RVECE (NDOFE), RRPRX (NRPRX,MRPRX)
REAL    RLODE (NDOFE), RSTEF (NDOFE,NDOFE)

REAL    RMAT1 (MFUNN,MFUNN), RMAT2 (MFUNN,MFUNN),
+    RMAT3 (MFUNN,MFUNN), RMAT4 (MFUNN,MFUNN)
REAL    RVEC1 (MFUNN), RVEC2 (MFUNN)

REAL    SAMPR (MSAMP), WEIGH (MSAMP)
REAL    N (MNODE), NZ (MNODE)
REAL    ZT (MNODE), OCT (MNODE)
REAL    TT (MNODE), FT (MNODE), HT (MNODE), VT (MNODE),
+    UT (MNODE), TUT (MNODE), PT (MNODE)
REAL    GTT (MNODE), GFT (MNODE), GHT (MNODE), GVT (MNODE),
+    GUT (MNODE), GIUT (MNODE), GPT (MNODE)

REAL    TSTEP, R, W, ZR, OC,
+    T, F, H, V, U, TU, P,
+    GT, GF, GH, GV, GU, GIU, GP,
+    TZ, FZ, HZ, VZ, UZ, TUZ, PZ,

```

+ A, PRM, CDS, CPS, RHS, ELS, POS, ELI, P0, TRC, VRC

EXTERNAL FILLTB, MKMATE

# C---- SOLUTION PROCEDURE DATA

TSTEP = RRPRX(4,1)

# C---- LOCATION VECTOR

DO IFIXE = 1,NFIXE

DO JFIXE = 1,MFIXE

ILOCA = (IFIXE-1)\*MFIXE+JFIXE

LLOCE(ILOCA) = LFIXE(IFIXE,JFIXE)

RVECE(ILOCA) = RFUNE(IFIXE,JFIXE)

IF (LLOCE(ILOCA).EQ.0) THEN

RVECE(ILOCA) = 0.

END IF

END DO

END DO

IF (ITASK.EQ.1) THEN

RETURN

END IF

# C---- MATERIAL DATA

A = RMATE(1) ! Parameter for relative water cont.  
 PRM = RMATE(2) ! Permeability of the soil  
 CDS = RMATE(3) ! Thermal conductivity of the skeleton  
 CPS = RMATE(4) ! Heat capacity of the skeleton  
 RHS = RMATE(5) ! Density of the skeleton  
 ELS = RMATE(6) ! Young's modulus of the skeleton  
 POS = RMATE(7) ! Poisson's ratio of the skeleton  
 ELI = RMATE(8) ! Young's modulus of the poreice  
 P0 = RMATE(9) ! Ref. porosity  
 TRC = RMATE(10) ! Traction on the surface  
 VRC = RMATE(11) ! Velocity on the surface  
 OBP = RMATE(15) ! Overburden pressure

LFLAG = LTYPE(2)

# C---- ELEMENT DATA

DO INODE = 1,MNODE

ZT(INODE) = RPARE(1,INODE) ! Location  
 OCT(INODE) = RPARE(2,INODE) ! Old relative water content  
 TT(INODE) = RPARE(3,INODE) ! Temperature  
 FT(INODE) = RPARE(4,INODE) ! Function f  
 HT(INODE) = RPARE(5,INODE) ! Pressure  
 VT(INODE) = RPARE(6,INODE) ! Water velocity  
 UT(INODE) = RPARE(7,INODE) ! Displacement  
 TUT(INODE) = RPARE(8,INODE) ! Displacement velocity  
 PT(INODE) = RPARE(9,INODE) ! Porosity

GTT(INODE) = RPARE(10,INODE) ! Initial temp  
 GFT(INODE) = RPARE(11,INODE) ! Initial f  
 GHT(INODE) = RPARE(12,INODE) ! Initial pressure  
 GVT(INODE) = RPARE(13,INODE) ! Initial water velocity  
 GUT(INODE) = RPARE(14,INODE) ! Initial displacement  
 GTUT(INODE) = RPARE(15,INODE) ! Initial displ. velocity  
 GPT(INODE) = RPARE(16,INODE) ! Initial porosity

END DO

C---- NUMERICAL INTEGRATION

SAMPR(1) = -1.  
SAMPR(2) = +1.  
WEIGH(1) = 1.  
WEIGH(2) = 1.

ZR = (ZT(2)-ZT(1))/2

CALL FILLTB(RLODE, NDOFE, 0.0)  
CALL FILLTB(RSTEF, NDOFE\*NDOFE, 0.0)

DO ISAMP = 1,MSAMP  
R = SAMPR(ISAMP)  
W = WEIGH(ISAMP)

N(1) = (1-R)/2  
N(2) = (1+R)/2  
NZ(1) = -0.5/ZR  
NZ(2) = 0.5/ZR

Z = N(1)\*ZT(1) + N(2)\*ZT(2)  
OC = N(1)\*OCT(1) + N(2)\*OCT(2)  
T = N(1)\*TT(1) + N(2)\*TT(2)  
F = N(1)\*FT(1) + N(2)\*FT(2)  
H = N(1)\*HT(1) + N(2)\*HT(2)  
V = N(1)\*VT(1) + N(2)\*VT(2)  
U = N(1)\*UT(1) + N(2)\*UT(2)  
TU = N(1)\*TUT(1) + N(2)\*TUT(2)  
P = N(1)\*PT(1) + N(2)\*PT(2)

GT = N(1)\*GTT(1) + N(2)\*GTT(2)  
GF = N(1)\*GFT(1) + N(2)\*GFT(2)  
GH = N(1)\*GHT(1) + N(2)\*GHT(2)  
GV = N(1)\*GVT(1) + N(2)\*GVT(2)  
GU = N(1)\*GUT(1) + N(2)\*GUT(2)  
GTU = N(1)\*GTUT(1) + N(2)\*GTUT(2)  
GP = N(1)\*GPT(1) + N(2)\*GPT(2)

TZ = NZ(1)\*TT(1) + NZ(2)\*TT(2)  
FZ = NZ(1)\*FT(1) + NZ(2)\*FT(2)  
HZ = NZ(1)\*HT(1) + NZ(2)\*HT(2)  
VZ = NZ(1)\*VT(1) + NZ(2)\*VT(2)  
UZ = NZ(1)\*UT(1) + NZ(2)\*UT(2)  
TUZ = NZ(1)\*TUT(1) + NZ(2)\*TUT(2)  
PZ = NZ(1)\*PT(1) + NZ(2)\*PT(2)

CALL MKMATE(RMAT1,RMAT2,RMAT3,RMAT4,  
+ RVEC1,RVEC2,MFUNN,  
+ A,PRM,CDS,CPS,RHS,ELS,POS,ELI,P0,OBP,  
+ TSTEP,Z,OC,  
+ T,F,H,V,U,TU,P,  
+ GT,GF,GH,GV,GU,GTU,GP,  
+ TZ,FZ,HZ,VZ,UZ,TUZ,PZ)

DO IFUNN = 1,MFUNN  
DO JFUNN = 1,MFUNN  
DO INODE = 1,MNODE



```

        DO JNODE = 1,MNODE
            ILOCA = INODE + (IFUNN-1)*MNODE
            JLOCA = JNODE + (JFUNN-1)*MNODE
            RSTEF(ILOCA,JLOCA) = RSTEF(ILOCA,JLOCA) +
+           (NZ(INODE)*RMAT1(IFUNN,JFUNN)*NZ(JNODE) +
+           NZ(INODE)*RMAT2(IFUNN,JFUNN)*N(JNODE) +
+           N(INODE)*RMAT3(IFUNN,JFUNN)*NZ(JNODE) +
+           N(INODE)*RMAT4(IFUNN,JFUNN)*N(JNODE))*ZR*W
        END DO
    END DO
END DO

DO IFUNN = 1,MFUNN
    DO INODE = 1,MNODE
        ILOCA = INODE + (IFUNN-1)*MNODE
        RLODE(ILOCA) = RLODE(ILOCA) +
+       (NZ(INODE)*RVEC1(IFUNN) +
+       N(INODE)*RVEC2(IFUNN))*ZR*W
    END DO
END DO

END DO

IF (LFLAG.EQ.1) THEN
    RLODE(5) = RLODE(5) - VRC
    RLODE(9) = RLODE(9) + TRC
END IF

RETURN
END
    
```

```

C-----C
C-----C
    
```

```

SUBROUTINE MKMATE(RMAT1,RMAT2,RMAT3,RMAT4,
+               RVEC1,RVEC2,MFUNN,
+               A,PRM,CDS,CPS,RHS,ELS,POS,ELI,P0,OBP,
+               TSTEP,Z,OC,
+               T,F,H,V,U,TU,P,
+               GT,GF,GH,GV,GU,GTU,GP,
+               TZ,FZ,HZ,VZ,UZ,TUZ,PZ)
    
```

```

PARAMETER (FLH = 333.E3 , T0 = 273.15 , GRF = 9.81,
+          RHW = 1000. , RHI = 917. , CPW = 4180.,
+          CPI = 2100. , CDW = 0.56 , CDI = 2.24,
+          POI = 0.33)
    
```

```

REAL RMAT1(MFUNN,MFUNN) , RMAT2(MFUNN,MFUNN) ,
+   RMAT3(MFUNN,MFUNN) , RMAT4(MFUNN,MFUNN)
REAL RVEC1(MFUNN) , RVEC2(MFUNN)
REAL B, GB, BKI, BKS, CBK, C, GC, DC, PRT, V
    
```

EXTERNAL FILLTB , RWCONT

```

CALL FILLTB(RMAT1,MFUNN*MFUNN,0.0)
CALL FILLTB(RMAT2,MFUNN*MFUNN,0.0)
CALL FILLTB(RMAT3,MFUNN*MFUNN,0.0)
    
```

```

CALL FILLTB (RMAT4,MFUNN*MFUNN,0.0)
CALL FILLTB (RVEC1,MFUNN,0.0)
CALL FILLTB (RVEC2,MFUNN,0.0)

PRT = PRM/(GRF*RHW)
B = H + RHW*GRF*Z + RHW*(FLH*T/T0)*2.*A*(1.-OC)/OC**2
GB = GH + RHW*GRF*Z + RHW*(FLH*GT/T0)*2.*A*(1.-OC)/OC**2
C = RWCONT(T,B,A,FLH,T0,RHW,RHI)
GC = RWCONT(GT,GB,A,FLH,T0,RHW,RHI)

IF (C.LT.1.) THEN
    DC = C**3/(2.*A*T)
ELSE
    DC = 0.0
END IF

BKS = ELS/(3.*(1.-2.*POS))
BKI = ELI/(3.*(1.-2.*POI))
CBK = (C + RHI/RHW*(1.-C))/((1.-P)*BKS + (1.-C)*P*BKI)

RMAT1(1,1) = CDS*(1.-P) + CDW*C*P + CDI*(1.-C)*P
RMAT1(3,2) = PRT*RHW*FLH*T/T0
RMAT1(3,3) = PRT
RMAT1(5,5) = (ELS*(1.-POS)/((1.+POS)*(1.-2.*POS))*(1.-P) +
+ ELI*(1.-POI)/((1.+POI)*(1.-2.*POI))*(1.-C)*P)

RMAT2(1,1) = (CDW-CDI)*DC*P*TZ
RMAT2(1,7) = (-CDS + CDW*C + CDI*(1.-C))*TZ
RMAT2(3,1) = PRT*RHW*(FLH/T0)*FZ
RMAT2(5,1) = -ELI*(1.-POI)/((1.+POI)*(1.-2.*POI))*DC*P*UZ-
+ RHW*FLH/T0*2.*F
RMAT2(5,2) = -RHW*FLH*T/T0*2.
RMAT2(5,3) = -1.
RMAT2(5,7) = -(ELS*(1.-POS)/((1.+POS)*(1.-2.*POS)) -
+ ELI*(1.-POI)/((1.+POI)*(1.-2.*POI))*(1.-C))*UZ

RMAT3(1,1) = RHW*CPW*V
RMAT3(4,2) = RMAT1(3,2)
RMAT3(4,3) = PRT
RMAT3(7,6) = -(1.-P)
RMAT3(7,7) = TU

RMAT4(1,1) = (RHS*CPS*(1.-P) + RHW*CPW*C*P +
+ RHI*CPI*(1.-C)*P +
+ (RHW*CPW-RHI*CPI)*DC*P*(T-GT) +
+ RHI*FLH/T0*P*(C-GC) +
+ RHI*FLH*T/T0*P*DC)/TSTEP
RMAT4(1,7) = ((-RHS*CPS + RHW*CPW*C +
+ RHI*CPI*(1.-C))*(T-GT) +
+ RHI*FLH*T/T0*(C-GC))/TSTEP
RMAT4(2,1) = 2.*A*(1.-C)/C**3*DC
RMAT4(2,2) = 1.
RMAT4(3,1) = (CBK*RHW*FLH/T0*2.*(2.*F - GF) +
+ (1.-RHI/RHW)*P*DC)/TSTEP
RMAT4(3,2) = CBK*RHW*FLH/T0*2.*(2.*T - GT)/TSTEP
RMAT4(3,3) = CBK/TSTEP
RMAT4(3,7) = (1.-RHI/RHW)*(C-GC)/TSTEP
RMAT4(4,1) = RMAT2(3,1)
RMAT4(4,4) = 1.
RMAT4(5,1) = -(RHW-RHI)*GRF*P*DC
RMAT4(5,7) = -(-RHS + RHW*C + RHI*(1.-C))*GRF

```

```

RMAT4 (6,5) = -1./TSTEP
RMAT4 (6,6) = 1.
RMAT4 (7,6) = PZ
RMAT4 (7,7) = 1./TSTEP + TUZ

RVEC1 (1) = RMAT1 (1,1)*TZ
RVEC1 (3) = RMAT1 (3,2)*FZ + RMAT1 (3,3)*HZ
RVEC1 (5) = RMAT1 (5,5)*UZ - H -
+          RHW*FLH*T/T0*2.*F

RVEC2 (1) = ((RHS*CPS*(1.-P) + RHW*CPW*C*P +
+          RHI*CPI*(1.-C)*P)*(T-GT) +
+          RHI*FLH*T/T0*P*(C-GC))/TSTEP +
+          RMAT3 (1,1)*TZ
RVEC2 (2) = F - A*(1.-C)**2/C**2
RVEC2 (3) = RMAT4 (3,3)*(H-GH) +
+          ((CBK*RHW*FLH/T0*2.*(F*(T-GT) + T*(F-GF)) +
+          (1.-RHI/RHW)*P*(C-GC))/TSTEP)
RVEC2 (4) = V + RMAT3 (4,2)*FZ + RMAT3 (4,3)*HZ
RVEC2 (5) = -(RHS*(P0-P) - RHW*(P0-C*P) +
+          RHI*(1.-C)*P)*GRF - OBP
RVEC2 (6) = TU - (U-GU)/TSTEP
RVEC2 (7) = (P-GP)/TSTEP - (1.-P)*TUZ + TU*PZ

END

```

```

C-----C
C-----C

```

SUBROUTINE FILLTB (RT,N,X)

```

REAL RT(N)
DO I = 1,N
    RT(I) = X
END DO

```

END

```

C-----C
C-----C

```

FUNCTION RWCONT (T,B,A,FLH,T0,RHW,RHI)

REAL RWCONT

```

DUM = (LOG(T/T0) + T0*B*(1./RHI - 1./RHW)/(FLH*T))/A
IF (T.GE.T0.OR.DUM.GE.0.) THEN
    RWCONT = 1.
ELSE
    RWCONT = 1./SQRT(1. - DUM)
END IF

```

END

```

C-----C
C-----C

```



```
Set [Real [SJumpGoal] 1.]
Set [Real [SIterGoal] 10.]
Set [Real [SConvGoal] 0.000001]
```



```

Set [Real [SMindt]      0.]
Set [Real [SMaxdt]     0.]

Real [SData (2 5)]
Set [SData ((SInitialTime SCurrentTime SFinaltime
              STimeStep SEchoTimeInt)
          (SJumpGoal      SIterGoal      SConvGoal  SMindt      SMaxdt
        ))]
Set [Real [RInitialTime] 0.]
Set [Real [RCurrentTime] 0.]
Set [Real [RFinaltime] 600.]
Set [Real [RTimeStep] 1.]
Set [Real [REchoTimeInt] 1000.]

Set [Real [RJumpGoal] 0.1]
Set [Real [RIterGoal] 3. ]
Set [Real [RConvGoal] 0.000001]
Set [Real [RMindt] 0.0000000001]
Set [Real [RMaxdt] 100.0]

Real [RData (2 5)]
Set [RData ((RInitialTime RCurrentTime RFinaltime
              RTimeStep REchoTimeInt)
          (RJumpGoal      RIterGoal      RConvGoal  RMindt      RMaxdt
        ))]

If [Eq [Flag 1] { Write [Window "RData ="] Write [Window RData] }]
If [Eq [Flag 1] { Write [Window "RProb ="] Write [Window RProb] }]

Set [Integer [Mtstep] 144] / Number of timesteps /

/ ELEMENT POINTERS /

Integer [Poin (n 6)]
Do [i (1 n) {Set [Poin (i) (i 2 1 2 1 14) ]}]
Set [Poin (1) (1 2 2 2 1 14)]
If [Eq [Flag 1] {Write [Window "Poin ="] Write [Window Poin] }]

/ NODAL NUMBERS /

Integer [Nodes (n 2)]
Do [i (1 n) {Set [Nodes (i) (i Inc [i])]}]
If [Eq [Flag 1] { Write [Window "Nodes ="] Write [Window Nodes] }]

/ MATERIAL PROPERTIES /

Set [Real [Mat (1 14)] ((A PRM CDS CPS RHS ELS POS
                        ELI P TRC VRC BTEMP GTEMP DTIME))]
If [Eq [Flag 1] {Write [Window "Mat ="] Write [Window Mat] }]
    
```

/ TYPE PROPERTIES /

```
Set[Integer[Typ(2 2)] ((101 0) (101 1))]
If[Eq[Flag 1]{Write[Window "Typ ="] Write[Window Typ]}]
Set[Integer[RTyp(2 2)] ((101 0) (101 1))]
```

/ FUNCTION MAP /

```
Set[Integer[Fmap(2 7)] ((3 4 5 6 7 8 9) (10 11 12 13 14 15 16))]
If[Eq[Flag 1]{Write[Window "Fmap ="] Write[Window Fmap]}]
```

/ PARAMETER MAP /

```
Set[Integer[Pmap(1 16)] ((1 2 3 4 5 6 7 8
                        9 10 11 12 13 14 15 16))]
If[Eq[Flag 1]{Write[Window "Pmap ="] Write[Window Pmap]}]
```

/ FIXITY CODES /

```
Integer[TFix(m 7)]
Do[i (1 m){Set[TFix(i) (0 0 0 0 0 0 -1)]}]
Set[TFix(1) (0 0 0 0 0 0 -1) ]
Set[TFix(m) (0 0 0 0 0 0 -1) ]
Set[Integer[TStore(m 7)] TFix]
```

```
Integer[SFix(m 7)]
Do[i (1 m){Set[SFix(i) (0 -1 -1 -1 -1 -1 0)]}]
Set[SFix(1) (0 -1 -1 -1 -1 -1 0) ]
Set[SFix(m) (0 -1 0 -1 0 -1 0) ]
Set[Integer[SStore(m 7)] SFix]
```

```
Integer[RFix(m 7)]
Do[i (1 m){Set[RFix(i) (-1 0 0 0 0 0 0)]}]
Set[RFix(1) (0 0 0 0 0 0 0) ]
Set[RFix(m) (0 0 0 0 0 0 0) ]
Set[Integer[RStore(m 7)] RFix]
```

```
Integer[Fix(m 7)]
Do[i (1 m){Set[Fix(i) (-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1)]}]
Set[Fix(1) (0 -1 -1 -1 -1 -1 -1) ]
Set[Fix(m) (0 -1 0 -1 0 -1 -1) ]
```

```
If[Eq[Flag 1]{Write[Window "Fix ="] Write[Window Fix]}]
```

/ FUNCTIONS /

```
Real[F(m 16)]
```

```
Set[F(1 1) 0.0000625] / Location /
Set[F(2 1) 0.000125]
Set[F(3 1) 0.00025]
Set[F(4 1) 0.0005]
Set[F(5 1) 0.0010]
Do[i (6 60) {Set[F(i 1) Div[Mul[Sub[Dec[i] 3] 0.001] 1.]]}]
```

```
Set[F(61 1) 0.0600]
Set[F(62 1) 0.0700]
Set[F(63 1) 0.0800]
Set[F(64 1) 0.1000]
```

```
Do[i (1 m) {Set[F(i 2) 1. ]}] / Relative water content /
Do[i (1 m) {Set[F(i 3) GTEMP ]}] / Temperature /
Do[i (1 m) {Set[F(i 4) 0. ]}] / Function f /
Do[i (1 m) {Set[F(i 5) 0. ]}] / Suction /
Do[i (1 m) {Set[F(i 6) 0. ]}] / Water velocity /
Do[i (1 m) {Set[F(i 7) 0. ]}] / Displacement /
Do[i (1 m) {Set[F(i 8) 0. ]}] / Displacement velocity /
Do[i (1 m) {Set[F(i 9) P ]}] / Porosity /
```

```
Do[i (1 m) {Set[F(i 10) GTEMP ]}] / Initial temperature /
Do[i (1 m) {Set[F(i 11) 0. ]}] / Initial function f /
Do[i (1 m) {Set[F(i 12) 0. ]}] / Initial suction /
Do[i (1 m) {Set[F(i 13) 0. ]}] / Initial water velocity /
Do[i (1 m) {Set[F(i 14) 0. ]}] / Initial displacement /
Do[i (1 m) {Set[F(i 15) 0. ]}] / Initial displ. velocity /
Do[i (1 m) {Set[F(i 16) P ]}] / Initial porosity /
```

```
If[Eq[Flag 1] {Write[Window "F ="] Write[Window F]}]
```

```
Pause[]
```

```
/ SOLUTION PROCEDURE /
```

```
Real[Ctime]
Real[Etime]
```

```
Do[j (1 Mtstep) {
```

```
/----- Temperature -----/
```

```
Set[RData(1 1) 0.0]
Set[RData(1 2) 0.0]
Set[RFix RStore]
```

```
Fem[ Prob RData Poin Nodes Typ
      Mat Pmap Fmap RFix F Window]
```

```
/ Function f - Suction - Water velocity - displacement - disp.veloc/
```

```
Set[Ctime SData(1 2)]
Set[SData(1 1) SData(1 2)]
Set[SData(1 3) Add[SData(1 2) RData(1 2)]]
Set[SData(1 4) RData(1 2)]
Set[SData(2 4) RData(1 2)]
Set[SData(2 5) RData(1 2)]
Set[SFix SStore]
```

```
Fem[ Prob SData Poin Nodes Typ
      Mat Pmap Fmap SFix F Window]
```

/----- Porosity -----/

```
Set[TData(1 1) Ctime]
Set[TData(1 3) Add[Ctime RData(1 2)]]
Set[TData(1 4) RData(1 2)]
Set[Etime TData(1 5)]
Set[TData(2 4) RData(1 2)]
Set[TData(2 5) RData(1 2)]
Set[TFix TStore]
If[GE[Ctime Etime] {Set[TData(1 5)
                        Add[Etime EchoTimeInt]]}]

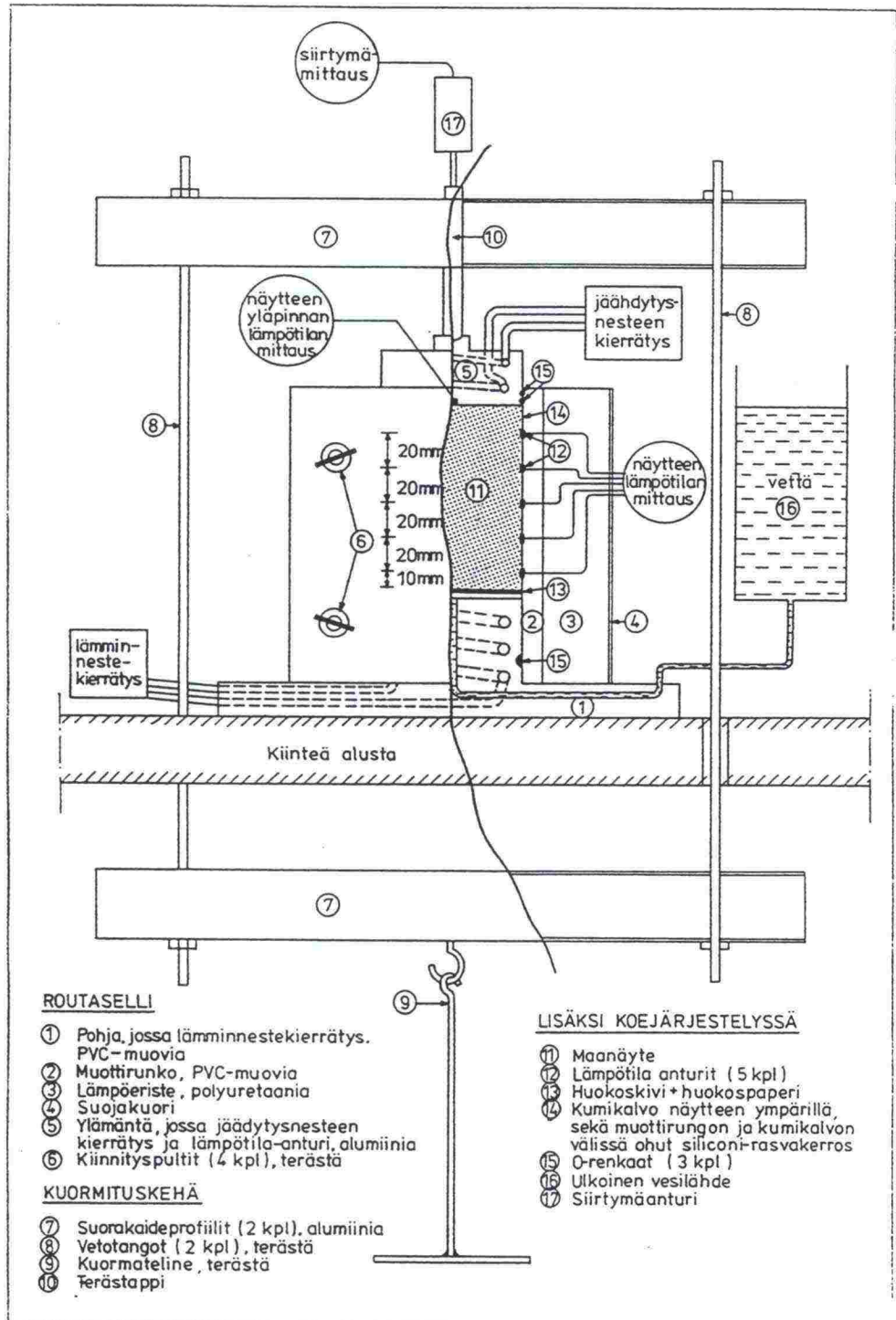
Fem[ Prob TData Poin Nodes Typ
      Mat Pmap Fmap TFix F Window]

If[GE[Ctime 600.0] {Set[Mat(1 14) 0.0]}]
}
```

]

END []





Kuva 1: VTT:n geotekniikan laboratorion routasellin rakenne ja koejärjestelyt.

Mat =

9.9999997E-05	5.0000001E-08	2.000000	900.0000	2726.000
1.0000000E+07	0.4000000	1.0000000E+07	0.3900000	0.
0.	270.1500	276.1500	100.0000	
3023.148	1.000000			
3632.521	10.00000			
3632.521	1.0000000E-06			
609.3736	609.3736			
3600.000	609.3736			

Location:

6.2500003E-05	1.2500001E-04	2.5000001E-04	5.0000002E-04	1.0000000E-03
2.0000001E-03	3.0000000E-03	4.0000002E-03	5.0000004E-03	6.0000001E-03
7.0000002E-03	8.0000004E-03	9.0000005E-03	1.0000001E-02	1.1000001E-02
1.2000000E-02	1.3000000E-02	1.4000000E-02	1.5000001E-02	1.6000001E-02
1.7000001E-02	1.8000001E-02	1.9000001E-02	2.0000001E-02	2.1000002E-02
2.2000002E-02	2.3000002E-02	2.4000000E-02	2.5000000E-02	2.6000001E-02
2.7000001E-02	2.8000001E-02	2.9000001E-02	3.0000001E-02	3.1000001E-02
3.2000002E-02	3.3000000E-02	3.4000002E-02	3.5000000E-02	3.6000002E-02
3.7000000E-02	3.8000003E-02	3.9000001E-02	4.0000003E-02	4.1000001E-02
4.2000003E-02	4.3000001E-02	4.4000003E-02	4.5000002E-02	4.6000004E-02
4.7000002E-02	4.8000000E-02	4.9000002E-02	5.0000001E-02	5.1000003E-02
5.2000001E-02	5.3000003E-02	5.4000001E-02	5.5000003E-02	5.6000002E-02
5.9999999E-02	7.0000000E-02	7.9999998E-02	0.1000000	

Relative water content:

9.4729304E-02	9.4897792E-02	9.5236920E-02	9.5927224E-02	9.7355150E-02
0.1004113	0.1037743	0.1074982	0.1116525	0.1163240
0.1216245	0.1277096	0.1347892	0.1431590	0.1532529
0.1657529	0.1817583	0.2032338	0.2341005	0.2836816
0.3823768	0.7949652	1.000000	1.000000	1.000000
1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

Temperature:

270.1500	270.1607	270.1820	270.2247	270.3102
270.4813	270.6524	270.8235	270.9948	271.1659
271.3368	271.5075	271.6778	271.8476	272.0167
272.1848	272.3517	272.5167	272.6793	272.8381
272.9905	273.1341	273.1872	273.2424	273.2972
273.3517	273.4058	273.4595	273.5128	273.5657
273.6182	273.6703	273.7219	273.7731	273.8239
273.8742	273.9240	273.9734	274.0222	274.0706
274.1184	274.1657	274.2126	274.2588	274.3046
274.3497	274.3944	274.4385	274.4820	274.5251
274.5675	274.6094	274.6508	274.6916	274.7318
274.7715	274.8107	274.8492	274.8873	274.9248
275.0695	275.3956	275.6785	276.1500	



Function f:

9.1324691E-03	9.0966811E-03	9.0252468E-03	8.8822506E-03	8.5963877E-03
8.0264462E-03	7.4585695E-03	6.8931254E-03	6.3303648E-03	5.7709520E-03
5.2157724E-03	4.6652532E-03	4.1203480E-03	3.5823095E-03	3.0527394E-03
2.5331844E-03	2.0266310E-03	1.5369855E-03	1.0703823E-03	6.3760206E-04
2.6089401E-04	6.6521020E-06	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.

Porewater pressure:

-3028239.	-3016452.	-2992924.	-2945819.	-2851632.
-2663755.	-2476439.	-2289806.	-2103940.	-1919061.
-1735462.	-1553287.	-1372853.	-1194578.	-1018994.
-846619.9	-678450.4	-515789.2	-360682.5	-216726.3
-91339.36	-6650.415	-4381.537	-4327.879	-4274.205
-4220.516	-4166.811	-4113.090	-4059.354	-4005.604
-3951.838	-3898.058	-3844.263	-3790.454	-3736.631
-3682.794	-3628.944	-3575.080	-3521.203	-3467.313
-3413.410	-3359.494	-3305.567	-3251.626	-3197.674
-3143.710	-3089.734	-3035.746	-2981.748	-2927.738
-2873.717	-2819.687	-2765.645	-2711.593	-2657.531
-2603.458	-2549.377	-2495.286	-2441.186	-2387.076
-2170.551	-1628.671	-1086.186	0.	

Porewater velocity:

-1.8948896E-08	-1.8962135E-08	-3.8093098E-08	-7.6316987E-08	-1.5280938E-07
-3.8139425E-09	-9.1330019E-09	-1.6581092E-08	-2.6026072E-08	-3.7498037E-08
-5.1157397E-08	-6.6646976E-08	-8.3915062E-08	-1.0292659E-07	-1.2377245E-07
-1.4564435E-07	-1.6867327E-07	-1.9217131E-07	-2.1462736E-07	-2.3290413E-07
-2.3505865E-07	-2.1704909E-07	-2.7289570E-07	-2.7352627E-07	-2.7360721E-07
-2.7368714E-07	-2.7376612E-07	-2.7384411E-07	-2.7392110E-07	-2.7399707E-07
-2.7407205E-07	-2.7414603E-07	-2.7421902E-07	-2.7429098E-07	-2.7436195E-07
-2.7443193E-07	-2.7450091E-07	-2.7456886E-07	-2.7463585E-07	-2.7470182E-07
-2.7476679E-07	-2.7483077E-07	-2.7489375E-07	-2.7495571E-07	-2.7501665E-07
-2.7507659E-07	-2.7513551E-07	-2.7519337E-07	-2.7525024E-07	-2.7530609E-07
-2.7536097E-07	-2.7541481E-07	-2.7546764E-07	-2.7551945E-07	-2.7557024E-07
-2.7562004E-07	-2.7566878E-07	-2.7571653E-07	-2.7576326E-07	-2.7587680E-07
-2.7610506E-07	-2.7634181E-07	-2.7670254E-07	-2.7680565E-07	

Displacement:

-1.3931635E-03	-1.3826155E-03	-1.3616419E-03	-1.3201841E-03	-1.2392264E-03
-1.0851645E-03	-9.4161439E-04	-8.0855878E-04	-6.8594608E-04	-5.7373848E-04
-4.7187140E-04	-3.8025453E-04	-2.9877486E-04	-2.2730220E-04	-1.6568511E-04
-1.1374724E-04	-7.1273433E-05	-3.7989885E-05	-1.3538665E-05	2.5810316E-06
1.1145168E-05	1.3738174E-05	1.3497888E-05	1.3166138E-05	1.2838490E-05
1.2514945E-05	1.2195504E-05	1.1880171E-05	1.1568944E-05	1.1261825E-05
1.0958815E-05	1.0659917E-05	1.0365131E-05	1.0074458E-05	9.7878983E-06
9.5054538E-06	9.2271266E-06	8.9529158E-06	8.6828250E-06	8.4168523E-06
8.1550015E-06	7.8972707E-06	7.6436645E-06	7.3941796E-06	7.1488203E-06
6.9075859E-06	6.6704788E-06	6.4374981E-06	6.2086465E-06	5.9839235E-06
5.7633306E-06	5.5468695E-06	5.3345393E-06	5.1263419E-06	4.9222776E-06

4.7223475E-06	4.5265524E-06	4.3348932E-06	4.1473704E-06
3.9639849E-06			
3.2718274E-06	1.8314287E-06	8.0568742E-07	0.

Displacement velocity:

-2.1949998E-07	-2.1949528E-07	-2.1946417E-07	-2.1931641E-07
-2.1868351E-07			
-2.1610430E-07	-2.1178332E-07	-2.0572602E-07	-1.9796333E-07
-1.8853697E-07			
-1.7748610E-07	-1.6485842E-07	-1.5071635E-07	-1.3513439E-07
-1.1820332E-07			
-1.0004769E-07	-8.0844153E-08	-6.0870228E-08	-4.0626805E-08
-2.1405462E-08			
-7.7321340E-09	-2.8536062E-09	-2.6320872E-09	-2.5681641E-09
-2.5050084E-09			
-2.4426272E-09	-2.3810169E-09	-2.3201787E-09	-2.2601134E-09
-2.2008237E-09			
-2.1423079E-09	-2.0845667E-09	-2.0276016E-09	-1.9714137E-09
-1.9160025E-09			
-1.8613707E-09	-1.8075168E-09	-1.7544418E-09	-1.7021471E-09
-1.6506312E-09			
-1.5998981E-09	-1.5499465E-09	-1.5007783E-09	-1.4523942E-09
-1.4047925E-09			
-1.3579757E-09	-1.3119443E-09	-1.2666970E-09	-1.2222358E-09
-1.1785617E-09			
-1.1356756E-09	-1.0935750E-09	-1.0522636E-09	-1.0117418E-09
-9.7200781E-10			
-9.3306474E-10	-8.9491126E-10	-8.5754909E-10	-8.2097712E-10
-7.8519663E-10			
-6.4999672E-10	-3.6764025E-10	-1.6500448E-10	0.

Porosity:

0.4692359	0.4691351	0.4689508	0.4685554	0.4676651
0.4647143	0.4605456	0.4568591	0.4524749	0.4476884
0.4425538	0.4374583	0.4324402	0.4274091	0.4223329
0.4171788	0.4120365	0.4069609	0.4020318	0.3973848
0.3933652	0.3907121	0.3898238	0.3897979	0.3898004
0.3898030	0.3898055	0.3898080	0.3898106	0.3898131
0.3898156	0.3898182	0.3898207	0.3898232	0.3898258
0.3898283	0.3898308	0.3898333	0.3898359	0.3898384
0.3898410	0.3898435	0.3898460	0.3898486	0.3898511
0.3898536	0.3898561	0.3898587	0.3898612	0.3898637
0.3898663	0.3898688	0.3898714	0.3898740	0.3898765
0.3898790	0.3898815	0.3898841	0.3898865	0.3898929
0.3899069	0.3899247	0.3899627	0.3899754	



## **TIELAITOKSEN SISÄISIÄ JULKAISUJA**

- 32/1993 V-poikkileikkaus ja teräsverkot tierakenteissa; Tulokset V-poikkileikkauksen ja teräsverkkojen käyttökokeista tien pituussuuntaisten halkeamien ehkäisyssä. TIEL 4000043
- 48/1993 Geopalveluiden maksu- ja mittausperusteet; Geopalveluysiköiden tuloslaskelmat. TIEL 4000049
- 48/1994 Päälystettyjen teiden heijastushalkeilun esto, esiselvitys. TIEL 4000088

## **TIELAITOKSEN TUTKIMUKSIA**

- 4/1992 Tiepenkereen holvautuminen, loppuraportti. TIEL 3100005
- 5/1993 Arktinen tienrakentaminen, Kilpisjärven hankkeen yhteenvedo. TIEL 3100011

## **TIELAITOKSEN SELVITYKSIÄ**

- 1/1992 Pystyjojanauhojen laatuvaatimukset; laadunvalvonta ja testausmenetelmät. TIEL 3200057
- 31/1992 Pohjaveden maatiivistesuojan tiivistäminen. TIEL 3200086
- 46/1992 Syvästabiloinnin laadunvalvontaohje. TIEL 3200099
- 62/1992 Hienoaineksen vaikutus stabiloidun moreenimurskeen pakka-kestävyyteen. TIEL 3200112
- 68/1992 Tien pohja- ja päällysrakenteet -tutkimusohjelma (TPPT), perussuunnitelma. TIEL 3200118
- 69/1992 Rakennettujen ja perusparannettujen teiden tasaisuus. TIEL 3200119
- 78/1992 PTM-auton tuottamien tunnuslukujen käyttökelpoisuus ja vertailtavuus sekä niiden yhteys laser-mittauksiin (IRI, IRI4, PI/Laser). TIEL 3200134
- 8/1993 Sitomattoman kantavan kerroksen rakentaminen. TIEL 3200135
- 15/1993 Masuunikuonan käyttö sitomattomissa päällysrakennekerroksissa. TIEL 3200142
- 16/1993 Betonipäällysteen seuranta; Vt 4 Kempele-Kiviniemi, seurantaraportti nro 1. TIEL 3200144
- 19/1993 Teiden kuntoa ja palvelutasoa koskeva seurantatutkimus. TIEL 3200145
- 20/1993 Moreeni ja sen käyttö. TIEL 3200146
- 26/1993 Bentoniittimattojen ja muovikavojen kelpoisuus pohjaveden suojaukseen, tutkimuksia ja suosituksia. TIEL 3200152
- 34/1993 Kalliomurskeiden tiivistyminen ja hienoneminen, esitutkimus. TIEL 3200159
- 36/1993 Palaturpeen käyttö lämmöneristeenä, raportti koerakenteiden rakentamisesta. TIEL 3200161
- 38/1993 Sitomattomien kerrosten kiviainesten muodonmuutosominaisuudet; Kirjallisuusselvitys. TIEL 3200163
- 39/1993 Sitomattomien kerrosten kiviainesten muodonmuutosominaisuudet; Esiselvitysvaiheen kuormituskokeet. TIEL 3200164
- 40/1993 Teiden tasaisuusmittareiden vertailu; PTM:n, Roadmanin ja Dipstickin laitevertailu sekä epätasaisuuksien vaikutus tierasitukseen. TIEL 3200165
- 41/1993 Stabiloidun materiaalin maksimiraekoon sekä koekappaleen koon ja muodon vaikutus puristuslujuuteen. TIEL 3200166

## TIELAITOKSEN SELVITYKSIÄ

- 47/1993 Väsymissuorat tierakenteen mitoitusta varten. TIEL 3200172
- 59/1993 Valtatien 3 routamitoitus routanousun mukaan välillä Riihimäki P - Virala. TIEL 3200184
- 60/1993 Jännitys- ja muodonmuutosmittaukset tierakenteessa 1991-1992; Pohjaveden pinnan vaikutus, tienpinnan taipumamittaus eri lämpötiloissa, vertailu standardi paripyörä - Neste Oy:n kantavuusradan pyörä. TIEL 3200185
- 68/1993 Kuitukankaat tienrakennuksessa; Uudistetun VTT-GEO luokituksen mukaiset laatuvaatimukset. TIEL 3200193
- 71/1993 Nonwoven Geotextiles in Road Constructions. TIEL 3200193E
- 76/1993 Rakennettujen ja perusparannettujen teiden tasaisuus 1992-1993. TIEL 3200200
- 77/1993 Moreenin jalostaminen. TIEL 3200201
- 81/1993 Vt 12 Veittostensuon syvästabilointi, tutkimusraportti. TIEL 3200205
- 82/1993 Emulsiopäällysteiden suunnittelu ja rakentaminen. TIEL 3200206
- 4/1994 Strategic Highway Research Program (SHRP) - Long-Term Pavement Performance (LTPP); Materiaalimodulin määrittäminen takaisinlaskentaohjelmalla sekä tierakenteen vaurioitumisajankohdan ennustemallit. TIEL 3200213
- 7/1994 Tien pohja- ja päällysrakenteet, tutkimusohjelma (TPPT). Tutkimusohjelma vuosille 1994-2000. TIEL 3200218
- 8/1994 Roudan vaikutusten mallintaminen. TIEL 3200219
- 12/1994 Jännitys- ja muodonmuutosmittaukset tierakenteessa 1992-1993. Roudan sulamisen simulointi, pohjaveden pinnan vaikutus korkeassa lämpötilassa ja päällysteen reunan vaikutus. TIEL 3200223
- 24/1994 Tien pohja- ja päällysrakenteet - tutkimusohjelma (TPPT); Työn toiminta- ja laatusuunnitelma vuodelle 1994. TIEL 3200234
- 28/1994 Sitomattomien kerrosten kiviainesten muodonmuutosominaisuudet; Vuoden 1993 kuormituskokeet. TIEL 3200238
- 30/1994 Kallioleikkaukset. TIEL 3200240
- 45/1994 Maan routimisen termomekaaninen malli ja sen laskelmat. TIEL 3200254
- 47/1994 Masuunihiekan käyttö päällysrakennekerroksissa. TIEL 3200256
- 53/1994 Kalliomurskeiden tiivistyminen ja hienoneminen, loppuraportti. TIEL 3200262
- (Geotekniikan informaatiojulkaisuja:)*
- 2/1993 Massanvaihto. TIEL 3200127
- 21/1993 Pengerpaalutus. TIEL 3200147
- 23/1993 Pohjanvahvistusmenetelmän valinta. TIEL 3200149
- 24/1993 Tiegeotekniikan yleiset mitoituspäätökset. TIEL 3200150
- 39/1994 Tiepenkereen siirtymärakenteet pehmeillä. TIEL 3200248
- 42/1994 Nauhapystyöjitus. TIEL 3200251